



أنجيم ANJIM

Hard\_equation

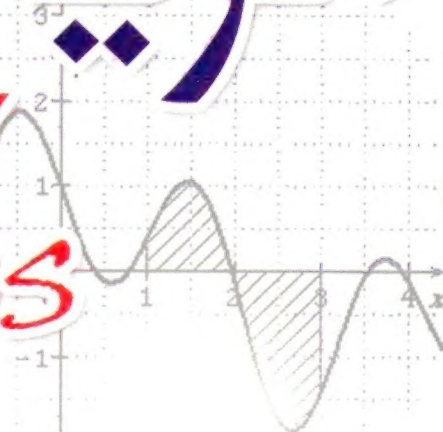
# الرياضيات

في



ثانوي

3 AS



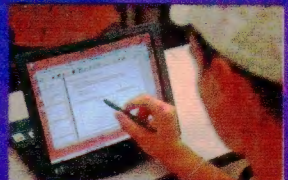
جبر تحليل هندسة

رياضيات  
تقني رياضي  
علوم تجريبية

- ملخص عملي للدرس .
- تمارين محلولة للتطبيق .
- تمارين مقترحة للتدريب .
- مواضيع بكالوريا أجنبية محلولة .
- دليل إستعمال الآلة الحاسبة المبرمجة .

إعداد : الأستاذ تزقفين مصطفى

وفقا للبرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية



أنجيم ANJIM

# الرياضيات في

ثانوي

3AS

جبر تحليل هندسة

رياضيات

تقني رياضي

علوم تجريبية

الخص عملي للدرس .

• تمارين محلولة ، تطبيق .

• تمارين مقترحة للتدريب .

• مواضيع بكالوريا أجنبية محلولة .

• دليل إستعمال الآلة الحاسبة المبرمجة .

إعداد : الأستاذ ترفعين مصطفى

وفقا للبرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية



## مقدمة

يقود هذا الكتاب إلى تلاميذ أقسام السنة الثالثة ثانوي، بشعبه العلمية، ويدخل في إطار سلسلة جديدة تدعى ((أنجيم)) - المجتهد -. وقد أعد الكتاب وفقا للبرنامج الرسمي الجديد لوزارة التربية الوطنية والذي سيشرع في تطبيقه مع هذه الأقسام ابتداء من هذه السنة الدراسية 2008/2007.

### أهداف الكتاب

- يمكن التلميذ من الحصول على معلومات محدّدة ومُخصصة.
- يساعد التلميذ على تطبيق المعلومات التي تحصل عليها في القسم.
- يدرّب التلميذ على الاستيعاب الحسن والتمسيح الجيد للمعلومات.
- يحضّر التلميذ لاجتياز امتحان الكالوريا.

### محتوى الكتاب

- يحتوي الفصل الأول من هذا الكتاب على منحصات لمحاوّر العشرة التي يتضمنها البرنامج الدراسي لمادة الرياضيات. يُقدّم المنحَص على شكل: تعريف - مبرهنة - للحفظ - نتائج . ويكون داخل إطار، يحدّد للتلميذ بالضبط بداية ونهاية المعلومة.
- يُتبع كل محور بخمسة تمارينات تطبيقية مَحولة.
- في نهاية كل محور نجد التلميذ عشرة تمارينات لتدريب تتضمن مهارات الخوار.
- تُخصّص الجزء الثاني من الكتاب لبيكالوريا (2005/2006/2007) لدول أجنبية، يتماشى برنامجها الدراسي في مادة الرياضيات و البرنامج الرسمي الجديد لوزارة التربية الوطنية الجزائرية.
- يتبع كل موضوع بمقترح للحل.
- في نهاية الكتاب، نجد التلميذ بعض الدساتير الأكثر استعمالا في هذا البرنامج.
- في نهاية الكتاب، نجد التلميذ بعض التعيينات الخاصة باستعمال الحاسبة المبرمجة TI-83 plus.
- أعزائي التلاميذ: تحسيدا لتطعناتكم لسجاح في نهاية السنة الدراسية. أصعب بين أيديكم هذا الكتاب. الذي يأتي ليساعدكم ويدلّل بعض الصعوبات التي ربما تعترضكم خلال تحضيراتكم للامتحان.
- أرجو لك عزيزي التلميذ التوفيق في استعمال هذا الكتاب. وتجد الإشارة هنا إلى ضرورة حل التمرين من طرف التلميذ قبل الإطلاع على الحل. ((المهم في التمرين هو حله والأهم هو التفكير في حله.))
- هذا الكتاب، يبقى إلى ما بعد البكالوريا كمرجع للطالب، كونه يتضمن منحصات لمفاهيم أساسية في البرنامج العام للرياضيات.

الأستاذ: ترقين مصطفى

ثانوية مفدي زكرياء - بني يزقن - ولاية غرداية /// العنوان الالكتروني: mtizmath@gmail.com

بسم الله الرحمن الرحيم

Hard\_equation

أنجيم في الرياضيات 3 ثانوي

عنوان الكتاب

الأستاذ : ترقين مصطفى

إعداد

دار نزهة الألباب

لنشر الكتب ووسائل

العلم و المعرفة

ساحة العقيد لطفي غرداية

هاتف فاكس: 029.88.35.49

هاتف Tel : 029.89.95.80

الإيداع القانوني

3367/2007

ISBN 978-9961-6615-7-5

تصميم الغلاف

CYCLOPEDIA

الفريق التقني لدار نزهة الألباب

جميع الحقوق محفوظة للمؤلف

لا يجوز نشر أي جزء من هذا الكتاب

أو تصويره أو تخزينه بأي وسيلة من الوسائل

دون موافقة كتابية من الناشر

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, transmitted in any form or by any means without prior permission in writing of the publisher.

محفوظة  
جميع الحقوق

# 1- الحساب

ما يجب أن يعرف:

★ قابلية القسمة في  $\mathbb{Z}$ .

♦ قاسم ومضاعف عدد صحيح:

تعريف

$a$  و  $b$  عددان صحيحان.

نقول أن  $b$  يقسم  $a$  إذا وجد عدد صحيح  $k$  بحيث:  $a = kb$  ونرمز بـ:  $b \mid a$ .

نقول أيضا أن: العدد  $b$  قاسم للعدد  $a$ . وكذلك أن: العدد  $a$  مضاعف للعدد  $b$ .

♦ خواص.

• كل عدد صحيح هو قاسم للعدد 0، و 0 هو المضاعف الوحيد للعدد 0.

• مضاعفات عدد صحيح غير معلوم  $n$  هي الأعداد من الشكل  $kn$  حيث  $k$  عدد صحيح،

ونرمز لمجموعة هذه المضاعفات بـ:  $n\mathbb{Z}$ . ولدينا  $0\mathbb{Z} = \{0\}$

• من أجل كل عدد صحيح  $a$ ، العدد 1 هو قاسم للعدد  $a$ .

• كل عدد صحيح  $a$  يقبل على الأقل القواسم:  $1, -1, a, -a$ .

• من أجل كل عددين صحيحين  $a$  و  $b$ . إذا كان  $b$  يقسم  $a$  و  $a$  يقسم  $b$

فإن  $a = b$  أو  $a = -b$ .

•  $a, b, c$  أعداد صحيحة:

- إذا كان  $a$  يقسم  $b$  و  $b$  يقسم  $c$  فإن  $a$  يقسم  $c$

- إذا كان  $a$  يقسم  $b$  فإن  $a$  يقسم  $bc$

- إذا كان  $a$  يقسم  $b$  فإن  $ac$  يقسم  $bc$

- إذا كان  $a$  يقسم  $b$  و  $a$  يقسم  $c$  فإن  $a$  يقسم  $b + c$

و  $a$  يقسم  $b - c$

Hard equation

الفصل الأول

ملخصات للدروس

تمارين تطبيقية

تمارين للحل

- إذا كان  $a$  يقسم  $b$  و  $a$  يقسم  $c$  فإن  $a$  يقسم  $kb + k'c$  حيث  $k$  و  $k'$  عددان صحيحان.

♦ القسمة الإقليدية في  $N$ .

### تعريف

$a$  و  $b$  عددان طبيعيين، حيث  $b$  يختلف عن الصفر. توجد ثنائية وحيدة  $(q; r)$  من الأعداد الطبيعية حيث:  $a = bq + r$  و  $0 \leq r < b$ . عملية إيجاد الثنائية  $(q; r)$  انطلاقاً من  $a$  و  $b$  تدعى القسمة الإقليدية للعدد  $a$  على العدد  $b$ .  $q$  يدعى حاصل القسمة و  $r$  يدعى باقي القسمة.

### للحفظ

$b$  يقسم  $a$  إذا وفقط إذا كان في القسمة الإقليدية للعدد  $a$  على العدد  $b$ ، باقي القسمة  $r$  معدوم. عند قسمة العدد الطبيعي  $a$  على العدد الطبيعي غير المعدوم  $b$  يكون باقي القسمة إما 0، إما 1، إما 2، إما... إما  $(b-1)$ .

♦ الموافقة العددية في  $Z$ .

### تعريف

$a$  و  $b$  عددان صحيحان، و  $n$  عدد طبيعي. نقول أن العدد  $a$  يوافق العدد  $b$  برصيد  $n$  إذا وفقط إذا كان العدد  $(a-b)$  مضاعف  $n$  ونرمز:  $a \equiv b[n]$ .

### للحفظ

- $a, b, c$ ، أعداد صحيحة و  $n$  عدد طبيعي غير معدوم.
- $a \equiv a[n]$  (الانعكاسية).
- إذا كان  $a \equiv b[n]$  فإن  $b \equiv a[n]$  (التناظرية). نقول أن  $a$  و  $b$  متوافقان.
- إذا كان  $(a \equiv b[n] \text{ و } b \equiv c[n])$  فإن  $a \equiv c[n]$  (المتعدية).
- $a \equiv 0[n]$  يكافئ  $a$  يقبل القسمة على  $n$ .

### للحفظ

- $a, b, a', b'$  أعداد صحيحة و  $m, n$  عددان طبيعيين غير معدومين.
- $a \equiv b[n]$  يكافئ  $(a + a') \equiv (b + a')[n]$ .
- إذا كان  $(a \equiv b[n] \text{ و } a' \equiv b'[n])$  فإن  $a + a' \equiv b + b'[n]$ .
- إذا كان  $a \equiv b[n]$  فإن  $aa' \equiv ba'[n]$ .
- إذا كان  $(a \equiv b[n] \text{ و } a' \equiv b'[n])$  فإن  $a \times a' \equiv b \times b'[n]$ .
- إذا كان  $a \equiv b[n]$  فإن  $a^m \equiv b^m[n]$ .

♦ القاسم المشترك الأكبر  $PGCD$

### تعريف

$a$  و  $b$  عددان طبيعيين غير معدومين. القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$  هو أكبر عنصر في مجموعة القواسم المشتركة لهذين العددين. يرمز له  $PGCD(a; b)$ .

### مبرهنة 1

إذا كان  $r$  هو الباقي في القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي غير المعدوم  $a$  على العدد الطبيعي غير المعدوم  $b$  وكان  $r \neq 0$ ، فإن مجموعة القواسم المشتركة للعددين  $a$  و  $b$  هي مجموعة القواسم المشتركة للعددين  $b$  و  $r$ .

### للحفظ

- $a, b, c$  أعداد طبيعية غير معدومة.
- $PGCD(a; b; c) = PGCD(PGCD(a; b); c)$ .
- $PGCD(a; b) = b$  يكافئ  $b$  يقسم  $a$ .
- $PGCD(a \times c; b \times c) = c \times PGCD(a; b)$ .
- $PGCD(a; b) = 1$  يكافئ  $(a \text{ و } b \text{ أوليان فيما بينهما})$ .
- $PGCD(a; b) = d$  يكافئ  $(\frac{a}{d} \text{ و } \frac{b}{d} \text{ أوليان فيما بينهما})$ .
- مجموعة القواسم المشتركة للعددين  $a$  و  $b$  هي مجموعة قواسم العدد  $PGCD(a; b)$ .



## خوارزمية إقليدس

$a$  و  $b$  عدداً طبيعيين غير معدومين حيث  $b < a$  و  $b$  لا يقسم  $a$ .

نسمي  $q_1$  و  $r_1$  الحاصل والباقي في القسمة الإقليدية للعدد  $a$  على العدد  $b$ .

بُخري قسمة إقليدية للعدد  $b$  على العدد  $r_1$ ، وهكذا إلى أن نصل إلى باق معدوم. فنكتب القسمة الإقليدية المتتابعة كما يلي:

$$a = bq_1 + r_1 \quad (0 < r_1 < b)$$

$$b = r_1q_2 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1)$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_{p-1} = r_pq_{p+1} + 0$$

هذه القسمة الإقليدية المتتابعة

تدعى خوارزمية إقليدس.

امتتالية  $(r_n)$  موجبة ومتناقصة

تماماً. أصغر حد لها غير معدوم

هو  $\text{PGCD}(a; b)$ .

## مبرهنة 2- بيزو-

عدداً طبيعيين غير معدومين  $a$  و  $b$ ، أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد

عدداً صحيحان  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث:  $a\alpha + b\beta = 1$ .

## مبرهنة 3- غوص-

$a$ ،  $b$  و  $c$  أعداد طبيعية غير معدومة. إذا كان  $a$  يقسم  $b \times c$  و كان  $a$

و  $h$  أوليان فيما بينهما، فإن  $a$  يقسم  $c$ .

## للحفظ

• إذا كان عدد طبيعي  $a$  يقبل القسمة على عددين طبيعيين أوليين فيما بينهما

$b$  و  $c$  فإن العدد  $a$  يقبل القسمة على  $bc$ .

• إذا كان  $\text{PGCD}(a; b) = d$  فإنه يوجد عدداً صحيحان  $\alpha$  و  $\beta$

بحيث:  $a\alpha + b\beta = d$ .

• عدد طبيعي أولي مع جلاء عددين طبيعيين إذا وفقط إذا كان أولي مع كل عامل من الجلاء.

## المضاعف المشترك الأصغر PPCM

## تعريف

$a$  و  $b$  عدداً طبيعيين غير معدومين.

المضاعف المشترك الأصغر للعددين  $a$  و  $b$  هو أصغر عنصر غير معدوم في مجموعة

المضاعفات المشتركة لذين العددين. يرمز له  $\text{PPCM}(a; b)$ .

## خواص

$a$ ،  $b$  و  $c$  أعداد طبيعية غير معدومة.

$$\text{PPCM}(a; b; c) = \text{PPCM}(\text{PPCM}(a; b); c).$$

$$\text{PPCM}(a; b) = a \text{ معناه } a \text{ مضاعف } b.$$

$$\text{PPCM}(a \times c; b \times c) = c \times \text{PPCM}(a; b).$$

$$\text{PPCM}(a; b) = ab \text{ معناه } a \text{ و } b \text{ أوليان فيما بينهما}.$$

$$\text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b) = ab.$$

$$\text{PPCM}(a; b) = m \text{ معناه } \frac{m}{a} \text{ و } \frac{m}{b} \text{ أوليان فيما بينهما}.$$

• مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين  $a$  و  $b$  هي مجموعة مضاعفات العدد

$$\text{PPCM}(a; b)$$

## الأعداد الأولية

## تعريف

العدد طبيعي  $p$  أولي إذا وفقط إذا قبل قاسمان بالضبط وهما: 1 و  $p$ .

## للحفظ

• العدداً 0 و 1 غير أوليين.

• العدد 2 هو أول عدد طبيعي أولي وهو الطبيعي الزوجي الأولي الوحيد.

• إذا كان  $p$  عدد أولي فهو أولي مع الأعداد 2، 3، ...،  $p-1$ .

• إذا كان عدد أولي يقسم جناً عوامل فهو يقسم أحد هذه العوامل.

• كل عدد طبيعي أكبر من 1 يقبل على الأقل قاسماً أولياً.

• كل عدد طبيعي غير أولي  $n$  وأكبر من 1 يقبل على الأقل قاسماً أولياً  $p$  حيث:  $p^2 \leq n$ .

متتالية  
الأعداد  
الأولية غير  
منتبهة.

## طريقة

اكتب العدد 485 في النظام ذي الأساس 2 ثم الأساس 5 ثم الأساس 12.

$$485 = 2 \times 242 + 1$$

$$485 = 12 \times 40 + 5$$

$$485 = 5 \times 97 + 0$$

$$242 = 2 \times 121 + 0$$

$$40 = 12 \times 3 + 4$$

$$97 = 5 \times 19 + 2$$

$$121 = 2 \times 60 + 1$$

$$19 = 5 \times 3 + 4$$

$$60 = 2 \times 30 + 0$$

$$30 = 2 \times 15 + 0$$

$$15 = 2 \times 7 + 1$$

$$7 = 2 \times 3 + 1$$

$$3 = 2 \times 1 + 1$$

$$485 = \overline{345}^{(12)} \text{ أي } , 485 = \overline{3420}^{(5)} \text{ أي } , 485 = \overline{111100101}^{(2)} \text{ أي }$$

## طريقة

انشر العدد  $\overline{1\alpha 52}^{(11)}$  في أساسه ثم اكتبه في النظام ذي الأساس 7.

$$\overline{1\alpha 52}^{(11)} = 2 \times 11^0 + 5 \times 11^1 + 10 \times 11^2 + 1 \times 11^3 = 2598$$

$$2598 = 7 \times 371 + 1$$

$$371 = 7 \times 53 + 0$$

$$53 = 7 \times 7 + 4$$

$$7 = 7 \times 1 + 0$$

$$2598 = \overline{10401}^{(7)} = \overline{1\alpha 52}^{(11)} \text{ أي:}$$

العدد 7431 مكتوب في الأساس 8، أكتب نفس العدد في الأساس 2.

$$7431 = 1 \times 8^0 + 3 \times 8^1 + 4 \times 8^2 + 7 \times 8^3$$

$$= 1 + (1+2) \times 2^3 + 2^2 \times 2^6 + (1+2+2^2) \times 2^9$$

$$= 1 + 2^3 + 2^4 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11}$$

$$= 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 +$$

$$+ 0 \times 2^5 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^7 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^{11}$$

$$\overline{7431}^{(8)} = \overline{111100011001}^{(2)} \text{ أي:}$$

تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية.

## مبرهنة 4

كل عدد طبيعي غير أولي  $n$  وأكبر من 1، يقبل تحليلاً وحيداً إلى جداء

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_m^{a_m}$$

عوامل أولية. ويكتب بالشكل:  $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \dots \times p_m^{a_m}$  حيث:  $p_1, p_2, \dots, p_m$  أعداد أولية متميزة و  $a_1, a_2, \dots, a_m$  أعداد طبيعية غير معدومة. ( $m$  عدد طبيعي).

## التعداد

## مبرهنة 5

$x$  عدد طبيعي أكبر من 1.

كل عدد طبيعي  $n$  يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط على الشكل:

$$n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p$$

حيث:  $a_p \neq 0$  و  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$  أعداد طبيعية تحقق:

$$0 \leq a_h < x \text{ من أجل كل عدد طبيعي } h \text{ حيث } h < p$$

هذه الكتابة للعدد  $n$  تدعى نشر العدد  $n$  وفق الأساس  $x$ . ونرمز:

$$n = \overline{a_p \dots a_2 a_1 a_0}^{(x)}$$

## للحفظ

• كل عدد طبيعي أصغر من الأساس  $x$  يدعى رقماً في الأساس  $x$ .

• في نظام التعداد ذي الأساس 2 الرقمان هما: 0، 1.

• في نظام التعداد ذي الأساس 10 الأرقام هي: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9.

• في نظام التعداد ذي الأساس 11 الأرقام هي: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9،  $\alpha$  ( $\alpha$  يمثل 10).

• في نظام التعداد ذي الأساس 12 الأرقام هي: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9،  $\alpha$ ،  $\beta$  ( $\beta$  يمثل 11).

## تارين محلولة

## الموافقة العددية

1 عَيِّن الأعداد الطبيعية  $n$  بحيث يكون العدد  $2^n - 1$  يقبل القسمة على 17.

الحل: ندرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية للعدد  $2^n$  على 17.

نجد:  $2^0 \equiv 1[17]$  ،  $2^1 \equiv 2[17]$  ،  $2^2 \equiv 4[17]$  ،  $2^3 \equiv 8[17]$  ،  $2^4 \equiv 16[17]$  ،  $2^5 \equiv 15[17]$  ،  $2^6 \equiv 13[17]$  ،  $2^7 \equiv 9[17]$  ،  $2^8 \equiv 1[17]$  ...

من خواص الموافقة ينتج أن البواقي دورية ودورها 8، إذاً:  $2^n \equiv 1[17]$  يكافئ أن  $n = 8k$  حيث  $k \in \mathbb{N}$

## الموافقة العددية

2 عَيِّن الباقي في القسمة الإقليدية لـ:  $56^{66}$  على 5 ،  $155^{13}$  على 3 ،  $2007^{2008}$  على 9 ،  $2006^{2008}$  على 2007.

الحل:  $56 \equiv 1[5]$  منه  $56^{66} \equiv 1^{66}[5]$  أي  $56^{66} \equiv 1[5]$  إذا باقي القسمة الإقليدية للعدد  $56^{66}$  على 5 هو 1.

$155 \equiv 2[3]$  منه  $155^{13} \equiv 2^{13}[3]$  إذا للعدد  $155^{13}$  نفس باقي القسمة على 3.  $2^0 \equiv 1[3]$  ،  $2^1 \equiv 2[3]$  ،  $2^2 \equiv 1[3]$  من خواص الموافقة ينتج أن البواقي دورية ودورها 2، ولدينا:  $2^{13} = 2^{2 \times 6 + 1} \equiv 2[3]$  فإن  $2^{13} \equiv 2[3]$  . إذا باقي القسمة الإقليدية للعدد  $155^{13}$  على 3 هو 2.  $2008 \equiv 1[9]$  منه  $2008^{2007} \equiv 1^{2007}[9]$  أي  $2008^{2007} \equiv 1[9]$  إذا باقي القسمة الإقليدية للعدد  $2008^{2007}$  على 9 هو 1.

$2006^0 \equiv 1[2007]$  ،  $2006 \equiv 2006[2007]$  ،  $2006^2 \equiv 2[2007]$  ،  $2006^3 \equiv 0[2007]$  ...

من خواص الموافقة ينتج أنه: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أكبر من 2 لدينا:

$2007 \equiv 0[2007]$  وبالتالي باقي قسمة  $2006^{2008}$  على 2007 هو 0.

## خوارزمية اقليدس- مبرهنتي بيزو و غوص

3 بَيِّن أن المعادلة  $53x + 25y = 1$  تقبل حلاً في  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، ثم حل هذه المعادلة.

الحل: باستعمال خوارزمية اقليدس نجد:  $53 = 25 \times 2 + 3$  و  $25 = 3 \times 8 + 1$

و  $3 = 1 \times 3 + 0$  إذا آخر باقي غير معدوم في هذه القسومات هو 1. يعني

$\text{PGCD}(53; 25) = 1$  ( يمكن ترتيب العمليات في جدول )

أي العددان 53 و 25 أوليان فيما بينهما، وبالتالي حسب بيزو توجد على الأقل ثنائية  $(\alpha, \beta)$  من  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  تحقق المعادلة  $53\alpha + 25\beta = 1$ . هذه الثنائية  $(\alpha, \beta)$  تعتبر حلاً للمعادلة المطلوبة. (ثنائية بيزو ليست وحيدة)

لحل المعادلة نوجد حلاً خاصاً باستعمال خوارزمية اقليدس كما يلي:  $1 = 25 - 3 \times 8$  أي

$$1 = 25 - (53 - 25 \times 2) \times 8$$

وبالتالي:  $1 = 53 \times (-8) + 25 \times (17)$  يعني أن الثنائية  $(-8; 17)$  حلاً خاصاً للمعادلة.

نوجد إذاً جميع الحلول كما يلي:

من الكتابتين  $53x + 25y = 1$  و  $1 = 53 \times (-8) + 25 \times (17)$  وبالطرح طرف من طرف نحصل على:  $53(x + 8) = 25(-y + 17)$  هذا يعني أن 25 يقسم العدد  $53(x + 8)$  وبما أن

53 و 25 أوليان فيما بينهما (حسب ما سبق) فحسب غوص 25 يقسم  $(x + 8)$

أي  $(x + 8) = 25k$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  إذاً  $x = 25k - 8$

لإيجاد قيم  $y$  نعوض  $x$  بقيمته في المعادلة  $53x + 25y = 1$  فنجد بعد الحساب:  $y = -53k + 17$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة المطلوبة هي:  $\{(25k - 8; -53k + 17) / k \in \mathbb{Z}\}$ .

## التحليل إلى جداء عوامل أولية

4 أوجد الثنائيات  $(x; y)$  من المجموعة  $N \times N$  والتي تحقق المعادلة:

$$x^2 - y^2 = 2^2 \times 23^2$$



إذا كان  $d = 7$  فإن:  $a' + b' = 83$  و  $d \times b' = 240$  يعني  $a'$  و  $b'$  حلّي  
المعادلة:  $x^2 - 83x + 240 = 0$  وبالتالي:  $a' = 80$  و  $b' = 3$  منه:  $a = 560$  و  $b = 21$ .  
إذا كان  $d = 1$  فإن:  $a' + b' = 581$  و  $d \times b' = 240$  مستحيل.  
خلاصة: العددين المطلوبان هما: 560 و 21.

## التعداد

|   |  |
|---|--|
| 6 | $n$ عدد طبيعي، يكتب في الأساس $x$ بالشكل 1254، ويكتب العدد $2n$ في نفس الأساس $x$ بالشكل 2541. عيّن $x$ .<br>أكتب العدد $n$ في الأساس 10، ثم اكتب العدد $3n$ في الأساس $x$ . |
|---|--|

الحل: لدينا:  $n = 4 + 5x + 2x^2 + x^3$  و  $2n = 1 + 4x + 5x^2 + 2x^3$

تنتج المعادلة التالية:  $x^2 - 6x - 7 = 0$

ذات المجهول الطبيعي  $x$  حيث:  $x > 5$ . حلّي المعادلة هما: -1 و 7 إذاً  $x = 7$

يعني  $n$  يكتب 480 في الأساس 10.  $n = 1254^{(7)} = 4 + 5 \times 7 + 2 \times 7^2 + 1 \times 7^3 = 480$

$3n$  يكتب 1440 في الأساس 10 ثم يحوّل إلى الأساس 7.

$$1440 = 7 \times 205 + 5$$

$$\text{نجد: } 205 = 7 \times 29 + 2 \text{ أي } 3n = 4125^{(7)}$$

$$29 = 7 \times 4 + 1$$

## تمارين للتدريب

1. القسمة الإقليدية للعدد الطبيعي  $a$  على كل من العددين 155 و 161 تعطي نفس

الحاصل، والباقيان على الترتيب 65 و 23. تعرّف على العدد  $a$ .

2. ماهي البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية لعدد طبيعي فردي على 4؟

بيّن أنه إذا كان  $n$  عدد طبيعي فردي فإن العدد  $n^2 - 1$  يقبل القسمة على 8.

3. عيّن البواقي الممكنة في القسمة الإقليدية لمربع عدد صحيح على 8.

الحل: لدينا:  $x^2 - y^2 = 2^2 \times 23^2$  تكافئ  $(x-y)(x+y) = 2^2 \times 23^2$  يعني أن كلا  
من العددين  $(x-y)$  و  $(x+y)$  يقسم العدد  $2^2 \times 23^2$  علماً أن:  $0 < x-y \leq x+y$   
و  $(x-y)$  و  $(x+y)$  زوجيان معاً أو فرديان معاً.  
نوجد أولاً قواسم العدد  $2^2 \times 23^2$  وهي من الشكل  $2^n \times 23^m$  حيث:  $n \in \{0;1;2\}$  و  
 $m \in \{0;1;2\}$  هذه القواسم هي:

1; 2; 4; 23; 46; 92; 529; 1058; 2116 وباستعمال الشرط السابق نحصل  
على الجملتين التاليتين:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=1058 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x-y=46 \\ x+y=46 \end{cases} \text{ وبعد حلّها نجد الثنائيات } (x; y) \text{ المطلوبة وهي:} \\ (530; 528) \text{ و } (46; 0).$$

## العلاقة بين PGCD و PPMC

|   |  |
|---|--|
| 5 | أوجد عددين علماً أن مجموعهما 581 وحاصل قسمة مضاعفيهما المشترك الأصغر على قاسميهما المشترك الأكبر هو 240. |
|---|--|

الحل: نبحث عن عددين  $a$  و  $b$  بحيث:  $a + b = 581$  و

$$PPCM(a; b) = 240 \times PGCD(a; b)$$

$$\text{علماً أن: } PGCD(a; b) \times PPCM(a; b) = ab \text{ وأن: } PGCD(a; b) = d$$

$$\text{معناه: } \frac{a}{d} \text{ و } \frac{b}{d} \text{ أوليان فيما بينهما}$$

فإن الشرط الثاني يكتب:  $d \times b' = 240$  و  $d \times a' = 581$  و  $b = d \times b'$  و  $a = d \times a'$

$$PGCD(a'; b') = 1$$

نبحث أولاً عن عددين  $a'$  و  $b'$  بحيث:  $d(a' + b') = 581$  و  $d \times b' = 240$

$$PGCD(a'; b') = 1$$

الشرط الأول يعطي قيم  $d$  الممكنة وهي قواسم 581 الذي يكتب  $7 \times 83$  إذاً:

$$d \in \{1; 7; 83; 581\}$$

مناقشة: إذا كان  $d = 581$  فإن:  $a' + b' = 1$  و  $d \times b' = 240$  مستحيل.

## 2- الدوال العددية

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ عموميات

في كامل هذا المحور، نتعامل مع الدوال العددية للمتغير الحقيقي، يعني دوال تأخذ متغيراتها من جزء في  $R$  (تدعى مجموعة البدء) وتضع قيمها في جزء من  $R$  (تدعى مجموعة الوصول).

♦ مجموعة التعريف

**تعريف** مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي جزء من مجموعة البدء وتضم الأعداد التي لها صورة في مجموعة الوصول بالدالة  $f$ . ونرمز لها:  $D_f$

♦ التمثيل البياني

**تعريف** في المستوي المنسوب إلى المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، التمثيل البياني

للدالة  $f$  هو مجموعة النقط  $M$  من المستوي والتي إحداثياتها  $(x; y)$

تحقق:  $x \in D_f$  و  $y = f(x)$  **معادلة ديكارتية للتمثيل البياني**

♦ الشفعية - الدورية

(الدالة  $f$  زوجية) يعني أنه (من أجل كل  $x$  من  $D_f$ :  $-x \in D_f$  و  $f(-x) = f(x)$ )

(الدالة  $f$  فردية) يعني أنه (من أجل كل  $x$  من  $D_f$ :  $-x \in D_f$  و  $f(-x) = -f(x)$ )

(الدالة  $f$  دورية ودورها  $p$ ) يعني أنه (من أجل كل  $x$  من  $D_f$ :  $(x+p) \in D_f$  و

$(x-p) \in D_f$  و  $f(p+x) = f(x)$ ) (  $p$  عدد حقيقي موجب تماماً)

عَيِّن الأعداد الصحيحة  $n$  التي تحقق:  $[8] \equiv 1 \pmod{n+3}$ .

4.  $n$  عدد طبيعي.

1. أوجد حسب قيم العدد  $n$  البواقي الممكنة في قسمة العدد  $5^n$  على 13.

2. استنتج أن العدد  $1 - 2007^{2008}$  يقبل القسمة على 13.

3. يَبَيِّن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معلوم، العدد  $31^{4n+1} + 44^{4n-1}$  يقبل القسمة على 13.

5. يَبَيِّن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، العددان التاليان أوليان فيما بينهما، في كل حالة:

(1):  $n+2$  و  $n+3$ ، (2):  $7n+2$  و  $4n+1$ ، (3):  $n(2n+1)$  و  $n+1$ ، (4):  $2n+1$  و  $3n+1$ .

6.  $n$  عدد طبيعي غير معلوم، نضع:  $a = 4n+3$  و  $b = 5n+2$  و  $d = \text{PGCD}(a; b)$

1. أعط قيمة  $d$  في كل حالة من الحالات الثلاث التالية:  $n=1$ ،  $n=11$ ،  $n=15$ .

2. احسب العدد  $5a - 4b$  واستنتج قيم  $d$  الممكنة.

3. عَيِّن العددين الطبيعيين  $n$  و  $k$  بحيث:  $4n+3=7k$ ، ثم العددين الطبيعيين  $n$  و  $k'$

بحيث:  $5n+2=7k'$ .

7. حل في المجموعة  $N \times N$  كلا من المعادلات التالية:

(1):  $x^2 - y^2 = 77$ ، (2):  $x^2 - y^2 = 36$ ، (3):  $x^2 - y^2 = 165$ ، (4):  $xy - 3y - 24 = 0$ .

8.  $a$  و  $b$  عددان طبيعيان غير معدومين، نضع:  $d = \text{PGCD}(a; b)$  و  $m = \text{PPCM}(a; b)$

تعرف على جميع الثنائيات  $(a; b)$  التي تحقق:  $m = d^2$  و  $d + m = 156$  و  $a \geq b$ .

9. لا يملك نسيم إلا قطعاً نقدياً ذات  $20DA$  وأوراقاً نقدية ذات  $100DA$ . علماً أن لديه

مبلغ  $300DA$ . كم قطعة وكم ورقة نقدية لنسيم؟

10. نضع:  $a \in Z$  و  $b \in Z^*$

1. نفرض أن  $\text{PGCD}(a; b) = 1$ ، يَبَيِّن باستعمال مبرهنة بيزو أن:  $\text{PGCD}(a; b^2) = 1$

و  $\text{PGCD}(a^2; b^2) = 1$

واستنتج أن:  $\text{PGCD}(a; b) = 1$  يكافئ  $\text{PGCD}(a^2; b^2) = 1$

2. نعتبر  $x$  عدد صحيح.

• انشر العبارة:  $(x^2 + x - 1)^2$ ، وحلّ العبارتين:  $x^2 + x - 2$  و  $x^2 + 4x + 4$ .

• عَيِّن الأعداد الصحيحة  $x$  بحيث يكون الكسر  $\frac{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 4}$  قابلاً للاختزال.

## للحفظ

- إذا كانت الدالة  $f$  زوجية فإن محور الترتيب في المعلم المتعامد هو محور تناظر لتمثيلها البياني.
- إذا كانت الدالة  $f$  فردية فإن مبدأ المعلم هو مركز تناظر لتمثيلها البياني.
- إذا كانت الدالة  $f$  دورية ودورها  $p$ ، فإن تمثيلها البياني صامد إجمالا بالانسحابات التي شعاعها  $pki$  حيث  $(k \in \mathbb{Z})$

## ◆ تركيب داليتين

## تعريف

نعتبر  $E$ ،  $F$  و  $G$  ثلاثة أجزاء من  $R$ .  
إذا كانت الدالة  $f$  من  $E$  نحو  $F$  وكانت الدالة  $g$  من  $F$  نحو  $G$ ، فإن الدالة  $g \circ f$  تدعى مركب الداليتين  $f$  و  $g$  بهذا الترتيب وهي من  $E$  نحو  $G$   
معرفة بـ:  $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ .  
ولدينا:  $x \in D_{g \circ f}$  يكافئ  $(x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g)$

## ◆ اتجاه تغيير دالة

## تعريف

$f$  دالة عددية معرفة على المجال  $I$   
|  $f$  متزايدة تماماً على  $I$  | يكافئ  
| من أجل كل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$ ، إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $f(x_1) < f(x_2)$  |  
|  $f$  متناقصة تماماً على  $I$  | يكافئ  
| من أجل كل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$ ، إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $f(x_1) > f(x_2)$  |  
|  $f$  متزايدة على  $I$  | يكافئ  
| من أجل كل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$ ، إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $f(x_1) \leq f(x_2)$  |  
|  $f$  متناقصة على  $I$  | يكافئ  
| من أجل كل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$ ، إذا كان  $x_1 < x_2$  فإن  $f(x_1) \geq f(x_2)$  |  
|  $f$  ثابتة على  $I$  | يكافئ  
| من أجل كل  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$ ،  $f(x_1) = f(x_2)$  |

## للحفظ

$f$  و  $g$  دالتان معرفتان على نفس المجال  $I$ .  
إذا كان للدالتين  $f$  و  $g$  نفس اتجاه التغيير فإن  $g \circ f$  تكون متزايدة على  $I$ .  
إذا كان للدالتين  $f$  و  $g$  اتجاهات متعاكسين فإن  $g \circ f$  تكون متناقصة على  $I$ .

## ◆ القيم الحدية لدالة

## تعريف

$f$  دالة عددية معرفة على المجموعة  $D$  من  $R$  و  $x_0$  عنصر من  $D$ .  
الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية عظمية عند  $x_0$  يكافئ من أجل كل  $x$  من  $D$ ،  
 $f(x) \leq f(x_0)$ .  
الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية صغرى عند  $x_0$  يكافئ من أجل كل  $x$  من  $D$ ،  
 $f(x) \geq f(x_0)$ .  
الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية عظمية محلية عند  $x_0$  يكافئ يوجد مجال  $I$  من  $D$  يضم  
 $x_0$  بحيث، من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f(x) \leq f(x_0)$ .  
الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية صغرى محلية عند  $x_0$  يكافئ يوجد مجال  $I$  من  $D$  يضم  
 $x_0$  بحيث، من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f(x) \geq f(x_0)$ .  
في هذه التعاريف،  $f(x_0)$  تدعى قيمة حدية للدالة  $f$  عند  $x_0$ .

## نمايات دوال مألوفة

## ★ النهايات

| الدوال<br>$n \in \mathbb{N}^*$      | $x \mapsto x^n$                         | $x \mapsto \sqrt[n]{x}$             | $x \mapsto  x $ | $x \mapsto \frac{1}{x^n}$                                 |
|-------------------------------------|---|-------------------------------------|-----------------|---|
| مجموعة<br>التعريف                   | $R$                                     | $R_+$                               | $R$             | $R^*$   |
| النهاية<br>عند $+\infty$            | $+\infty$                               | $+\infty$                           | $+\infty$       | $0^+$   |
| النهاية<br>عند $-\infty$            | $+\infty$ $n$ زوج<br>$-\infty$ $n$ فردي | غير<br>موجود                        | $+\infty$       | $0^+$ $n$ زوج<br>$0^-$ $n$ فردي                           |
| النهاية<br>عند $x_0$<br>$x_0 \in R$ | $x_0^n$                                 | $\sqrt[n]{x_0}$<br>حيث $x_0 \geq 0$ | $ x_0 $         | حالة $x_0 = 0$<br>$n$ زوج $+\infty$<br>$n$ فردي $+\infty$ |



| الدوال<br>$n \in \mathbb{N}^*$            | $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$   | $x \mapsto \frac{1}{ x }$          | $x \mapsto \sin x$ | $x \mapsto \cos x$ |
|---|----------------------------------|------------------------------------|--------------------|--------------------|
| مجموعة التعريف                            | $\mathbb{R}_+^*$                 | $\mathbb{R}^*$                     | $\mathbb{R}$       | $\mathbb{R}$       |
| النهاية عند $+\infty$                     | $0^+$                            | $0^+$                              | غير موجود          | غير موجود          |
| النهاية عند $-\infty$                     | غير موجود                        | $0^+$                              | غير موجود          | غير موجود          |
| النهاية عند $x_0$<br>$x_0 \in \mathbb{R}$ | $\frac{1}{\sqrt{x_0}}$ $x_0 > 0$ | $\frac{1}{ x_0 }$ حيث $x_0 \neq 0$ | $\sin x_0$         | $\cos x_0$         |

## للحفظ

إذا كان  $P(x)$  كثير الحدود فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$  من أجل

كل  $x_0$  من  $\mathbb{R}$ .

عند  $+\infty$  أو  $-\infty$ ، الكثير الحدود له نفس نهاية وحيد الحد الأعلى درجة في عبارته.

إذا كان  $Q(x)$  كسر ناطق فإن  $\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x) = Q(x_0)$  من أجل كل  $x_0$  من  $D_Q$ .

عند  $+\infty$  أو  $-\infty$ ، الكسر الناطق له نفس نهاية حاصل قسمة وحيد الحد الأعلى درجة في بسطه على وحيد الحد الأعلى درجة في مقامه.

## ◆ النهايات والمقارنة

الرمز  $\alpha$  يشير إلى عدد حقيقي،  $+\infty$  أو  $-\infty$ .  $l$  عدد حقيقي،  $f, g, h$  ثلاث دوال عددية معرفة على المجال  $I$ . (جوار  $\alpha$ )

إذا كان |من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  وكانت  $\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = l$  و  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l$  فإن  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$ . (اخضر)

إذا كان |من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $g(x) \leq f(x)$  وكانت  $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$ .

إذا كان |من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f(x) \leq h(x)$  وكانت  $\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = -\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$ .

## ◆ العمليات على النهايات

الرمز  $\alpha$  يشير إلى عدد حقيقي،  $+\infty$  أو  $-\infty$ .  $l$  و  $l'$  عدنان حقيقيان.

$f$  و  $g$  دالتان عدديتان معرفتان على المجال  $I$ . (جوار  $\alpha$ )

| نهايات المجموع   | $l$    | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|------------------|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| نهاية $f$ هي     | $l$    | $l$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| نهاية $g$ هي     | $l'$   | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| نهاية $(f+g)$ هي | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | غير معينة |

## نهايات الجداء

| نهاية $f$ هي            | $l$           | $l > 0$   | $l < 0$   | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$         |
|-------------------------|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| نهاية $g$ هي            | $l'$          | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ |
| نهاية $(f \times g)$ هي | $l \times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | غير معينة   |

نهايات حاصل القسمة (في حالة نهاية  $g$  غير معلومة)

| نهاية $f$ هي                        | $l$            | $l$      | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$       | $\pm\infty$ |
|-------------------------------------|----------------|----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| نهاية $g$ هي                        | $l' \neq 0$    | $l' < 0$ | $l' > 0$  | $l' > 0$  | $l' < 0$  | $\pm\infty$ |
| نهاية $\left(\frac{f}{g}\right)$ هي | $\frac{l}{l'}$ | $0$      | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | غير معينة   |

## ★ الاستمرارية

## تعريف

$f$  دالة عددية معرفة على المجال المفتوح  $I$  من  $R$  و  $x_0$  عنصر من  $I$ .

•  $f$  مستمرة عند  $x_0$  معناه  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

•  $f$  مستمرة عند  $x_0$  من اليمين معناه  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .

•  $f$  مستمرة عند  $x_0$  من اليسار معناه  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .

## مبرهنة

$f$  مستمرة عند  $x_0$  معناه  $f$  مستمرة عند  $x_0$  من اليمين ومن اليسار.

## ◆ امتداد دالة بالاستمرار

$f$  دالة معرفة ومستمرة على المجموعة  $D$  و  $x_0$  عدد حقيقي حيث:  $x_0 \notin D$  و  $l$  عدد حقيقي

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ، فإن الدالة  $g$  المعرفة على  $D \cup \{x_0\}$  بما يلي:

$g(x) = f(x)$  من أجل  $x \in D$  و  $g(x_0) = l$  تدعى امتداداً للدالة  $f$  بالاستمرار عند  $x_0$ .

## للحفظ

$f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على المجموعة  $D$  (عند كل  $x_0$  من  $D$ ).

• الدالتان  $(f+g)$  و  $(f \times g)$  مستمرتان على  $D$ .

• إذا كانت  $g$  لا تتعلم على  $D$  فإن: الدالتان  $\frac{1}{g}$  و  $\frac{f}{g}$  مستمرتان على  $D$ .

• إذا كانت  $u$  مستمرة عند  $x_0$  وكانت  $v$  مستمرة عند  $u(x_0)$  فإن

الدالة  $(v \circ u)$  مستمرة عند  $x_0$ .

• الدوال:  $\sqrt{f}$ ،  $|f|$ ،  $\sin f$ ،  $\cos f$ ،  $\tan f$  مستمرة على مجموعة تعريفها.

نهایات حاصل القسمة ( في حالة نهاية  $g$  معدومة )

| نهاية $f$ هي                        | $l > 0$<br>أو $+\infty$ | $l < 0$<br>أو $-\infty$ | $l < 0$<br>أو $-\infty$ | $l > 0$<br>أو $+\infty$ | 0         |
|-------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------|
| نهاية $g$ هي                        | $0^+$                   | $0^-$                   | $0^+$                   | $0^-$                   | 0         |
| نهاية $\left(\frac{f}{g}\right)$ هي | $+\infty$               | $-\infty$               | $-\infty$               | $+\infty$               | غير معينة |

## نهایات شهيرة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

## المستقيمات المقاربة

الرمز  $\alpha$  يشير إلى  $+\infty$  أو  $-\infty$ .  $f$  و  $g$  دالتان عدديتان معرفتان على الأقل على

أحد المجالين  $]a; +\infty[$  أو  $]-\infty; a[$

$(C_f)$  و  $(C_g)$  تمثيلهما البيانيان.

## تعريف

التمثيلان البيانيان  $(C_f)$  و  $(C_g)$  متقاربان عند  $\alpha$  يكافئ

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) - g(x)] = 0$$

## نتائج

• المستقيم الذي معادلته  $y = mx + p$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  عند  $\alpha$  معناه

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) - (mx + p)] = 0$$

إذا كان  $m \neq 0$  فإن المستقيم المقارب يكون مائلاً.

إذا كان  $m = 0$  فإن المستقيم المقارب معادلته  $y = p$  يكون مواز

لحامول محور الفواصل.

• إذا كان  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$  فإن المستقيم الذي معادلته  $x = x_0$  مقارب

للمنحنى  $(C_f)$  ويوازي حامل محور الترتيب.

الدالة  $h \mapsto f(x_0) + hf'(x_0)$  تدعى تقريب تآلفي للدالة  $h \mapsto f(x_0 + h)$  بجوار 0.

## للحفظ

لدينا  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ونكتب كذلك

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{بوضع } x - x_0 = h)$$

الكتابة التفاضلية  $dy = f'(x)dx$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{لدينا}$$

تكتب العلاقة (1) بالشكل:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0 \quad \text{و} \quad f'(x_0) = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} + o(h) \quad \text{أي} \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

$$\lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \theta(\Delta_x) = 0 \quad \text{و} \quad \Delta_y = f'(x_0)\Delta_x - \Delta_x\theta(\Delta_x)$$

عندما يكون المقدار  $\Delta_x$  قريب من الصفر، يكون لدينا:  $\Delta_y \approx f'(x_0)\Delta_x$  ونرمز بـ:  $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = f'(x_0)$

ويمكننا أن نستعمل الرمز:  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  بدل الرمز  $f'$ . ونكتب:  $f'(x_0) = \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)$

## الدالة المشتقة

## تعريف

$f'$  دالة عددية معرفة على المجموعة  $D$  وقابلة للاشتقاق على المجموعة  $D'$

(عند كل قيمة  $x_0$  من  $D'$  حيث:  $D' \subset D$ )

الدالة التي ترفق بكل عدد  $x$  من  $D'$ ، العدد المشتق  $f''(x)$  تدعى الدالة المشتقة الأولى

(أو المشتقة) للدالة  $f$ . ويرمز لها:  $f'$ .

## نتيجة

إذا كانت الدالة  $f'$  بدورها تقبل الاشتقاق على  $D''$

حيث:  $D'' \subset D'$ ، فباستعمال التعريف السابق توجد الدالة المشتقة للدالة  $f'$  يرمز

لها  $f''$  وتدعى الدالة المشتقة الثانية للدالة  $f$ .

بنفس الطريقة يمكننا الحديث عن الدالة المشتقة الثالثة، الرابعة، ... للدالة  $f$ .

## ◆ مبرهنة القيم المتوسطة

## مبرهنة

إذا كانت الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[a; b]$ ، فإنه من أجل كل عدد حقيقي  $k$  من المجال  $K$  الذي حداه  $f(a)$  و  $f(b)$ ، المعادلة  $f(x) = k$  تقبل على الأقل حلاً في المجال  $[a; b]$ .

ملحوظة: إضافة إلى  $f$  مستمرة في  $[a; b]$ ، إذا كانت  $f$  رتيبة تماماً على  $[a; b]$  فإن للمعادلة  $f(x) = k$  حلاً وحيداً.

تعمم هذه المبرهنة في حالة  $f$  مستمرة على مجال مفتوح أو نصف مفتوح، محدود أو غير محدود، في هذه الحالة حداً للمجال  $K$  يمكن أن يكونا نهايات  $f$  عند طرفي  $[a; b]$ .

## ★ الاشتقاقية

## ◆ العدد المشتق

## تعريف

$f'$  دالة عددية معرفة على المجال المفتوح  $I$  من  $R$  و  $x_0$  عنصر من  $I$ .

$f'$  تقبل الاشتقاق عند  $x_0$  إذا وفقط إذا تحقق أحد الشروط الثلاثة المتكافئة التالية:

• يوجد عدد حقيقي  $k$  ودالة  $\varepsilon$  معرفة على  $I$  بحيث:

$$f(x) = f(x_0) + k(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x), \quad I \text{ من } x$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 \quad \text{و}$$

• يوجد عدد حقيقي  $k$  ودالة  $\theta$  معرفة على  $I$  بحيث:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hk + h\theta(h), \quad I \text{ من } h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h) = 0 \quad \text{و}$$

• الدالة  $g$  المعرفة على  $I - \{x_0\}$  بـ:  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  تقبل نهاية

محدودة  $k$  عند  $x_0$ .

العدد الحقيقي  $k$  يدعى العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $x_0$  ونرمز:  $f'(x_0) = k$



| الدالة               | مجموعة تعريفها   | مجموعة قابلية اشتقاقها   | دالتها المشتقة                  |
|----------------------|--|--|---------------------------------|
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $R_+$  | $R_+^*$  | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $x \mapsto \sin x$   | $R$  | $R$  | $x \mapsto \cos x$              |
| $x \mapsto \cos x$   | $R$  | $R$  | $x \mapsto -\sin x$             |
| $x \mapsto \tan x$   | $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ | $R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ | $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$  |

العمليات على الدوال المشتقة

$f$  و  $g$  دالتان قابلتان للاشتقاق على المجموعة  $D$ .

| الدالة              | الدالة المشتقة                    | الشروط   |
|---------------------|-----------------------------------|--|
| $f + g$             | $f' + g'$                         | $I$  |
| $kf$                | $kf'$                             | $k \in R^*$  |
| $fg$                | $f'g + g'f$                       | $I$  |
| $\frac{1}{f}$       | $-\frac{f'}{f^2}$                 | $f \neq 0$ على كامل $D$                              |
| $\frac{f}{g}$       | $\frac{f'g - g'f}{g^2}$           | $g \neq 0$ على كامل $D$                              |
| $x \mapsto f(ax+b)$ | $x \mapsto af'(ax+b)$             | $a \in R^*$ و $b \in R$                              |
| $x \mapsto f[h(x)]$ | $x \mapsto h'(x) \times f'[h(x)]$ | $h$ دالة تقبل الاشتقاق على $E$ حيث: $h(E) \subset D$ |
| $f^n$               | $nf'f^{n-1}$                      | $n \in \mathbb{Z}^*$ و $f$ لا تعتمد من أجل $n < 0$   |
| $\sqrt{f}$          | $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$            | $f$ موجبة تماما على كامل $D$                         |

الدوال كثير الحدود والناطقة تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها

## مبرهنة

إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق على المجموعة  $D$ ، فإن هذه الدالة مستمرة على  $D$ .

عكس هذه المبرهنة غير صحيح

إنته

◆ معادلة المماس للمنحني

## تعريف

إذا كانت الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق عند  $x_0$ ، فإن المستقيم  $\Delta$  الذي

معادلته  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$  يدعى المماس للمنحني الممثل للدالة

$f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ .  $f'(x_0)$  يدعى معامل توجيه المماس  $\Delta$ .

ملاحظة:  $f$  دالة عددية معرفة على المجال المفتوح  $I$  من  $R$  و  $x_0$  عنصر من  $I$ .

إذا كانت الدالة  $g$  المعرفة على  $I - \{x_0\}$  بـ:  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  تقبل نهاية

غير محدودة ( $+\infty / -\infty$ ) عند  $x_0$ ، (أو عند  $x_0^+ / x_0^-$ ).

فإن الدالة  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند  $x_0$  وتمثيلها البياني يقبل مماسا (نصف مماس) عند

النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ ، يوازي حامل محور الترتيب.

◆ مشتقات الدوال المألوفة

| الدالة                    | مجموعة تعريفها | مجموعة قابلية اشتقاقها | دالتها المشتقة                 |
|---------------------------|----------------|------------------------|--------------------------------|
| $x \mapsto k$             | $R$            | $R$                    | $x \mapsto 0$                  |
| $x \mapsto x$             | $R$            | $R$                    | $x \mapsto 1$                  |
| $x \mapsto x^2$           | $R$            | $R$                    | $x \mapsto 2x$                 |
| $x \mapsto x^3$           | $R$            | $R$                    | $x \mapsto 3x^2$               |
| $x \mapsto x^n$           | $R$            | $R$                    | $x \mapsto nx^{n-1}$           |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$   | $R^*$          | $R^*$                  | $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$     |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ | $R^*$          | $R^*$                  | $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$ |

## \* الدوال الأصلية

## تعريف

$f$  و  $F$  دالتان معرفتان على المجال  $I$ .

$F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$ ، إذا وفقط إذا كانت الدالة  $F$  تقبل الاشتقاق على  $I$ ، و دالتها المشتقة هي  $f$ .

$$F'(x) = f(x) \quad \text{أي من أجل كل } x \text{ من } I$$

## للحفظ

مبرهنة: (وجود دوال أصلية لدالة)

كل دالة  $f$  مستمرة على المجال  $I$ ، تقبل على الأقل دالة أصلية  $F$  على  $I$ .

## خاصة:

• إذا قبلت الدالة  $f$  على المجال  $I$  دالة أصلية  $F$ ، فإن الدالة  $f$  تقبل على  $I$  عدد غير منته من الدوال الأصلية كلها من الشكل:

$$x \mapsto F(x) + k \quad \text{حيث } k \text{ عدد حقيقي}$$

• إذا قبلت الدالة  $f$  على المجال  $I$  دالة أصلية  $F$ ، فإنه من أجل كل ثنائية  $(x_0; y_0)$  حيث  $x_0 \in I$  و  $y_0 \in \mathbb{R}$ ، توجد دالة أصلية  $F_0$  وحيدة للدالة  $f$  على المجال  $I$  والتي تأخذ القيمة  $y_0$  عند  $x_0$ .

## الدوال الأصلية لدوال مألوفة

| الدالة                             | شروط وجود الدوال الأصلية  | الدوال الأصلية / $k \in \mathbb{R}$ |
|------------------------------------|---|-------------------------------------|
| $(a \in \mathbb{R}) / x \mapsto a$ | $x \in \mathbb{R}$  | $x \mapsto ax + k$                  |
| $x \mapsto x^n$                    | $x \in \mathbb{R}$ من أجل $n > 0$                               | $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ |
| $(n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\})$    | $x \in \mathbb{R}_+^*$ أو $x \in \mathbb{R}_-^*$ من أجل $n < 0$ |                                     |
| $x \mapsto x^n$                    | $x \in \mathbb{R}_+^*$  | $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ |
| $(n \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z})$  |   |                                     |
| $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$     | $x \in \mathbb{R}_+^*$  | $x \mapsto 2\sqrt{x} + k$           |

## المشتقة واتجاه تغير الدالة

## للحفظ

$f$  دالة قابلة للاشتقاق على المجال  $I$ .

$f$  متزايدة تماماً على  $I$  معناه من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) > 0$ .

$f$  متناقصة تماماً على  $I$  معناه من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) < 0$ .

$f$  ثابتة على  $I$  معناه من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) = 0$ .

ملاحظة:  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على المجال  $[a; b]$ .

• إذا كان من أجل كل  $x$  من  $[a; b]$ ،  $f'(x) > 0$  فإن  $f$  متزايدة تماماً على  $[a; b]$ .

• إذا كان من أجل كل  $x$  من  $[a; b]$ ،  $f'(x) < 0$  فإن  $f$  متناقصة تماماً على  $[a; b]$ .

## ◆ العدد المشتق من اليمين ومن اليسار

$f$  دالة عددية معرفة على المجال المفتوح  $I$  من  $\mathbb{R}$  و  $x_0$  عنصر من  $I$ .

•  $f$  تقبل الاشتقاق من يمين  $x_0$  إذا وفقط إذا كانت الدالة  $\varphi$  المعرفة على  $I - \{x_0\}$

$$\text{بـ: } \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{تقبل نهاية محدودة } k_1 \text{ عند يمين } x_0. \text{ ونرمز: } k_1 = f'_d(x_0)$$

$f'_d(x_0)$  هو معامل توجيه نصف المماس للمنحنى الممثل للدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ .

•  $f$  تقبل الاشتقاق من يسار  $x_0$  إذا وفقط إذا كانت الدالة  $\varphi$  المعرفة على  $I - \{x_0\}$

$$\text{بـ: } \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{تقبل نهاية محدودة } k_2 \text{ عند يسار } x_0. \text{ ونرمز: } k_2 = f'_g(x_0)$$

$f'_g(x_0)$  هو معامل توجيه نصف المماس للمنحنى الممثل للدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ .

## مبرهنة

$f$  دالة عددية معرفة على المجال المفتوح  $I$  من  $\mathbb{R}$  و  $x_0$  عنصر من  $I$ .

$f$  تقبل الاشتقاق عند  $x_0$  إذا وفقط إذا قبلت الاشتقاق من يمين  $x_0$  ومن

$$f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \quad \text{وكان: } x_0 \text{ يسار}$$

## تمارين محلولة

## النهايات

احسب نهايات الدوال التالية عند أطراف مجالات تعريفها في كل حالة.

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:  $f(x) = -4x^2 + x + 5$

الدالة  $g$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$  بالدستور:  $g(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

الدالة  $h$  معرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:  $h(x) = \frac{3-x}{x^2+2}$

الدالة  $k$  معرفة على  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $k(x) = x\sqrt{x + \frac{1}{x}}$

1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2) = -4(+\infty) = -\infty \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^2) = -4(+\infty) = -\infty \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{-16}{0^-} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{-16}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = 3 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-1}{x} \right) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-1}{x} \right) = 0^- \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty \sqrt{+\infty + 0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 \left( x + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + x} = 0$$

الكتابة  $\sqrt{x^2} = x$  تصح

فقط من أجل  $x \geq 0$ .

| الدالة                               | شروط وجود الدوال الأصلية   | الدوال الأصلية / $k \in \mathbb{R}$     |
|--------------------------------------|--|---|
| $x \mapsto \sin x$                   | $x \in \mathbb{R}$   | $x \mapsto -\cos x + k$                 |
| $x \mapsto \cos x$                   | $x \in \mathbb{R}$   | $x \mapsto \sin x + k$                  |
| $x \mapsto \sin(ax+b)$<br>$a \neq 0$ | $x \in \mathbb{R}$   | $x \mapsto \frac{-1}{a} \cos(ax+b) + k$ |
| $x \mapsto \cos(ax+b)$<br>$a \neq 0$ | $x \in \mathbb{R}$   | $x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax+b) + k$  |
| $x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$       | $l \in \mathbb{Z} / x \in ]l\pi; (l+1)\pi[$                              | $x \mapsto \cot^2 x + k$                |
| $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$       | $l \in \mathbb{Z} / x \in ]-\frac{\pi}{2} + l\pi; \frac{\pi}{2} + l\pi[$ | $x \mapsto \tan^2 x + k$                |

## عمليات على الدوال الأصلية

| دالة أصلية            | الشروط  | $f, g, f', g'$ دوال معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $I$ |
|-----------------------|---|--|
| $af$                  | على $I$   | $af'$ حيث $(a \in \mathbb{R})$                           |
| $f+g$                 | على $I$   | $f'+g'$  |
| $fg$                  | على $I$   | $f'g+g'f$  |
| $\frac{1}{f}$         | على $I$ حيث $f \neq 0$  | $-\frac{f'}{f^2}$  |
| $\frac{f^{n+1}}{n+1}$ | على $I$ من أجل $n > 0$<br>على $I$ حيث $f \neq 0$ من أجل $n < 0$ | $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\} / ff^n$                     |
| $\frac{f^{n+1}}{n+1}$ | على $I$ حيث $f > 0$   | $n \in \mathbb{Q} - \{-1\} / ff^n$                       |
| $\sqrt{f}$            | على $I$ حيث $f > 0$   | $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$                                   |
| $g \circ f$           | على $I$ و $f(I) \subset I$                                      | $(g' \circ f) \times f'$                                 |



$$k'(x) = 3(2x^2 + 5)'(2x^2 + 5)^2 = 12x(2x^2 + 5)^2, R \text{ من أجل كل } x$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}, R - \{-1; 1\} \text{ من أجل كل } x$$

$$R - \{-2\} \text{ من أجل كل } x$$

$$p'(x) = \frac{(-x^2 + 5)'(x+2) - (x+2)'(-x^2 + 5)}{(x+2)^2} = \frac{-2x(x+2) - (-x^2 + 5)}{(x+2)^2} = \frac{-x^2 - 4x - 5}{(x+2)^2}$$

$$q'(x) = \frac{(x^2 + x + 2)'}{2\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 2}}, R \text{ من أجل كل } x$$

### استعمال مبرهنة القيم المتوسطة

الدالة  $f$  معرفة على  $R$  بالدستور:  $f(x) = -x^3 - x + 5$

بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل على الأقل حلاً في المجال  $[0; 2]$ .

هل هذا الحل وحيد؟

3

الحل: الدالة  $f$  مستمرة على  $R$  كونها كثير الحدود، وبخاصة على  $[0; 2]$ .

ولدينا:  $f(0) = 5$  و  $f(2) = -5$  وبالتالي:  $f(0) \times f(2) < 0$

إذاً حسب مبرهنة القيم المتوسطة ( $k = 0$ )، فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل على الأقل

حلاً في المجال  $[0; 2]$ .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $R$  كونها كثير الحدود، وبخاصة على  $[0; 2]$ .

لدينا:  $f'(x) = -3x^2 - 1$ ، إذاً من أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $f'(x) < 0$  يعني  $f$

متناقصة تماماً على  $R$  وبخاصة على  $[0; 2]$ . وبالتالي الحل وحيد.

### محور التناظر لمنحن دالة

الدالة  $f$  معرفة على  $R$  بالدستور:  $f(x) = -x^2 - 4x + 1$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

بين أن المستقيم الذي معادلته  $x = -2$  هو محور تناظر للمنحنى  $(C_f)$ .

4

### قابلية الاشتقاق - حساب المشتقات

• ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند  $x_0$  في الحالتين:

$$x_0 = 0, f(x) = |x|, \quad x_0 = -1, f(x) = \sqrt{x+1}$$

• عيّن الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية:

$$g(x) = -4x^2 + x + 5 \text{ بالدستور: } R$$

$$h(x) = x^2 \cos x \text{ بالدستور: } R$$

$$k(x) = (2x^2 + 5)^3 \text{ بالدستور: } R$$

$$l(x) = \frac{2}{x^2 - 1} \text{ بالدستور: } R - \{-1; 1\}$$

$$p(x) = \frac{-x^2 + 5}{x + 2} \text{ بالدستور: } R - \{-2\}$$

$$q(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} \text{ بالدستور: } R$$

2

الحل:  $f(x) = \sqrt{x+1}$  معرفة على  $[-1; +\infty[$ . إذاً ندرس قابلية الاشتقاق من  $-1$  فقط.

$$\lim_{h \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

يعني أن  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند  $-1$ . كون النهاية غير محدودة.

$f(x) = |x|$  معرفة على  $R$ . ندرس قابلية الاشتقاق عند  $0$  من الجهتين.

$$\frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1$$

يعني أن الدالة  $f$  تقبل الاشتقاق من  $0$  و تقبل الاشتقاق من يسار  $0$  وبما أن

$f'_d(0) \neq f'_g(0)$  فإن  $f$  لا تقبل الاشتقاق عند  $0$ . هندسياً: المنحنى الممثل للدالة  $f$  يقبل

نصفين مماس عند النقطة ذات الفاصلة  $0$ .

$$g'(x) = -8x + 1, R \text{ من أجل كل } x$$

$$h(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x, R \text{ من أجل كل } x$$

الحل: (الطريقة 1) نحري تغيير للمعلم من  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  إلى  $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$  حيث:  $\Omega(-2; 0)$  وتستخرج معادلة للمنحنى  $(C)_r$  في المعلم الجديد، ثم نبين أنها معادلة التمثيل البياني لدالة زوجية.  $M$  نقطة من المستوي إحداثياتها  $(x; y)$  في المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  وإحداثياتها  $(X; Y)$  في المعلم  $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ .

2. حول حساب النهايات.

| الدالة $f$ معرفة بالدستور                      | أحسب نهايات $f$ عند                |
|--|------------------------------------|
| $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{ x  - 1}$              | $-\infty$ و $+\infty$ و $1$ و $-1$ |
| $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1}$   | $-\infty$ و $+\infty$ و $1$        |
| $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$ | $+\infty$ و $2$                    |
| $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1}$      | $-\infty$ و $+\infty$              |
| $f(x) = x + \sin x$                            | $-\infty$ و $+\infty$              |
| $f(x) = \frac{\tan 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$     | $0$                                |

3. الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $[2; +\infty[ \cup ]-\infty; -2]$  بالدستور:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$$

اكتب معادلة لمماس المنحنى  $(C)_r$  الممثل للدالة  $f$  عند النقطة ذات الفاصلة  $-3$ .

أعط معادلة لكل من نصفى المماس للمنحنى  $(C)_r$  عند النقطتين ذات الفاصلتين  $-2$  و  $2$ .

4. المستوي منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

الحل: (الطريقة 1) نحري تغيير للمعلم من  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  إلى  $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$  حيث:  $\Omega(-2; 0)$  وتستخرج معادلة للمنحنى  $(C)_r$  في المعلم الجديد، ثم نبين أنها معادلة التمثيل البياني لدالة زوجية.  $M$  نقطة من المستوي إحداثياتها  $(x; y)$  في المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  وإحداثياتها  $(X; Y)$  في المعلم  $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} x = X - 2 \\ y = Y \end{array} \right. \quad \text{(تستخرج من العلاقة الشعاعية } (O\Omega) = (\Omega\Omega) \text{)}$$

$$Y = -(X-2)^2 - 4(X-2) + 1 \quad \text{يكافئ} \quad Y = -X^2 - 4X + 1 \quad \text{معناه} \quad M \in (C)_r$$

أي

الكتابة الأخيرة هي معادلة للمنحنى  $(C)_r$  في المعلم  $(\Omega; \vec{i}; \vec{j})$ .

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $R$  بالدستور:  $g(x) = -x^2 + 5$

الدالة  $g$  زوجية كون: من أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $-x \in R$  و  $g(-x) = g(x)$ .

وبالتالي المستقيم الذي معادلته  $x = -2$  هو محور تناظر للمنحنى  $(C)_r$ .

(الطريقة 2) نبين أنه من أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $(-2-x) \in R$  و  $(-2+x) \in R$  و

$$f(-2+x) = f(-2-x) \quad \text{(تحقق من ذلك)}.$$

### تمارين للتدريب

1. الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $R - \{-2\}$  بالدستور:  $f(x) = \frac{5x-1}{2+x}$

احسب نهايات  $f$  عند أطراف مجالات التعريف، ثم استنتج أن هناك مستقيمات مقاربة للمنحنى الممثل للدالة  $f$ ، يطلب معادلاتها.

$$g(x) = \frac{-x^2 + 2x - 4}{x-1} \quad \text{الدالة } g \text{ معرفة على المجموعة } R - \{1\} \text{ بالدستور:}$$

يبين أن المستقيم الذي معادلته  $y = -x + 1$  هو مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة  $g$ .

$$h(x) = \frac{6x^2 - 7x + 3}{2x-1} \quad \text{الدالة } h \text{ معرفة على المجموعة } R - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ بالدستور:}$$

عُيِّن الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  بحيث: من أجل كل  $x$  من  $R - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ ,

7. الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $R - \{-1\}$  بالدستور:  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x}{(x+1)^2}$

عَيِّن الأعداد الحقيقية  $h, u, c$  حتى يكون، من أجل كل  $x$  من  $R - \{-1\}$ ،

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$$

استنتج الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$  والتي تنعدم من أجل  $x = 1$ .

8. الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $R - \{-1; 0; 1\}$  بالدستور:  $f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^3 - x}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

• يَبَيِّن أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية  $h, u, c$  بحيث: من أجل كل  $x$

$$f(x) = x + \frac{u}{x} + \frac{h}{x-1} + \frac{c}{x+1}, \quad R - \{-1; 0; 1\}$$

• ادرس تغيرات الدالة  $f$ ، وعَيِّن المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(C_f)$  وكذا مركز تناظره.

• حل المعادلتين:  $f(x) = 0$  و  $f(x) = x$  ثم أرسم  $(C_f)$ .

• نغير الدالة كثير الحدود  $g$  المعرفة على  $R$  بالدستور:

$$g(x) = x^4 - ax^3 - 6x^2 + ax + 1 \quad \text{و} \quad a \in R$$

تحقق - باستعمال النتائج السابقة حول تغيرات الدالة  $f$  - أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل

أربعة حلول حقيقية وذلك مهما كان العدد  $a$ .

9. الدالة  $f_m$  معرفة على المجموعة  $R$  بالدستور:  $f_m(x) = \frac{(x+m)(3x+10m)}{(x+2m)^2}$

حيث  $m$  وسيط حقيقي

$(C_m)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

• ادرس تغيرات الدالة  $f_m$ ، وعَيِّن المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(C_m)$ .

• ادرس وضعية  $(C_m)$  بالنسبة للمستقيم المقارب للمنحنى  $(C_m)$  والموازي لحامل محور

الفواصل.

• ما يمكن القول عن المنحنى  $(C_0)$ ؟

• الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $R$  بالدستور:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  حيث:

$a, b, c$  أعداد حقيقية.

عَيِّن الأعداد  $h, u, c$  حتى يكون:  $f(2) = 2, f(4) = -4, f'(4) = 0$ .

• ادرس تغيرات الدالة  $f$  واسم تمثيلها البياني  $(C_f)$  في المجال  $[0; 8]$ .

• عَيِّن الدالة  $g$  كثير الحدود من الدرجة الثانية، علماً أن المستقيم الذي معادلته

$$y' = 2x - \frac{3}{2}$$

وأن  $g(2) = 2$ .

• ادرس تغيرات الدالة  $g$  واسم تمثيلها البياني  $(C_g)$  في المجال  $[0; 8]$ .

• ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  في المجال  $[0; 8]$ .

5. الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $R - \{0\}$  بالدستور:  $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

• يَبَيِّن أن الدالة  $f$  فردية.

• نسمي  $g$  اختصاراً للدالة  $f$  على المجال  $I = ]0; +\infty[$  و  $(C_g)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق.

احسب نهايات  $g$  عند  $0$  و عند  $+\infty$ .

• يَبَيِّن أن الدالة  $g$  متزايدة على  $I$ .

• نضع:  $h(x) = g(x) - x$ . أحسب نهاية  $h$  عند  $+\infty$  وترجم هندسيا النتيجة.

• احسب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x}$ . ما هو مسار المنحنى  $(C_g)$  بجوار النقطة ذات الإحداثيات  $(0; 1)$ ؟

• أنشئ المنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$ .

6. عَيِّن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$  في كل حالة:

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}, \quad I = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[ \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}$$

$$I = ]-2; +\infty[ \quad \text{و} \quad f(x) = x\sqrt{x+2}, \quad I = R \quad \text{و} \quad f(x) = \cos^4 x \sin x$$

$$I = R \quad \text{و} \quad f(x) = \sin^3 x + \cos^2 x, \quad I = R \quad \text{و} \quad f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$$



### 3- الدالة الأسية- الدالة اللوغاريتمية

**Hard equation**

ما يجب أن يعرف:

الدالة الأسية

تعريف

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة  $f$  التي تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$  وتحقق

$$f'(x) = f(x) \text{ و } f(0) = 1.$$

يرمز لها  $\exp$  ونكتب:  $f(x) = \exp(x)$  أو  $f(x) = e^x$

وعموماً: من أجل  $k$  عدد حقيقي، توجد دالة وحيدة  $f$  تقبل الاشتقاق

على  $\mathbb{R}$  وتحقق المعادلة  $f' = kf$  و  $f(0) = 1$ .

معروفة بالدستور:  $f(x) = e^{kx}$

للحفظ

$a, b, x$  ثلاثة أعداد حقيقية.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b, \quad e^x > 0, \quad e^1 = e, \quad e^0 = 1$$

$$n \in \mathbb{Z} / e^{nx} = (e^x)^n, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$a < b \text{ يكافئ } e^a < e^b, \quad a = b \text{ يكافئ } e^a = e^b$$

الدالة  $\exp$  معروفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

$$(e^x)' = e^x, \quad x \text{ من } \mathbb{R}$$

إذا كانت  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على  $D$  فإن الدالة  $e^f$  تقبل

$$\text{الاشتقاق على } D. \text{ ولدينا: } (e^f)' = f' e^f$$

الدالة  $\exp$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$ . بجوار  $0$ ،  $e^h \approx 1 + h$

خواص جبرية

خواص تحليلية

نفرض أن  $m \neq 0$ . ما هي إحداثيات  $I_m$  نقطة تقاطع المنحني  $(C_m)$  مع مستقيمه المقارب الأفقي؟

تعرف على مجموعة النقط  $I_m$  عندما تتغير  $m$ .

10. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . نعتبر المثلث  $ABC$

المتساوي الساقين رأسه الأساسي  $A$ ، نخط به الدائرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها 1.

النقطة  $B$  تقع فوق محور الفواصل. يرمز  $H$  إلى المسقط العمودي للنقطة  $A$  على

الحامل  $(BC)$ .

العدد الحقيقي  $\alpha$  يمثل قياساً بالراديان للزاوية  $(\vec{i}; \overrightarrow{OB})$  حيث  $\alpha \in [0; \pi]$ .

• ما هي إحداثيات النقطة  $B$ ؟

عبّر عن الطولين  $BH$  و  $AH$  بدلالة  $\alpha$ .

استنتج مساحة المثلث  $ABC$  بدلالة  $\alpha$ .

• الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0; \pi]$  بالدستور:  $f(x) = (1 + \cos x) \sin x$ .

أ- عيّن مشتقة الدالة  $f$ ، وبيّن أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; \pi]$ ،

$$f'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$$

استنتج أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $[0; \pi]$ ،  $f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$ .

ب- أدرس إشارة العدد  $f'(x)$ ، ثم ارسم جدول تغيرات الدالة  $f$ .

• بيّن أنه توجد قيمة للعدد  $\alpha$  من أجلها تكون مساحة المثلث  $ABC$  أكبر مما يمكن.

تعرف على هذه المساحة العظمى.

• ما هي إذاً طبيعة المثلث  $ABC$ ؟

**للحفظ**

الدالة  $\ln$  متزايدة تماماً على  $]0; +\infty[$ .

من أجل  $a$  و  $b$  عنصران من  $]0; +\infty[$  ،  $\ln a = \ln b$  ، يكافئ  $a = b$ .

$\ln a < \ln b$  ، يكافئ  $a < b$ .

**حالة خاصة**

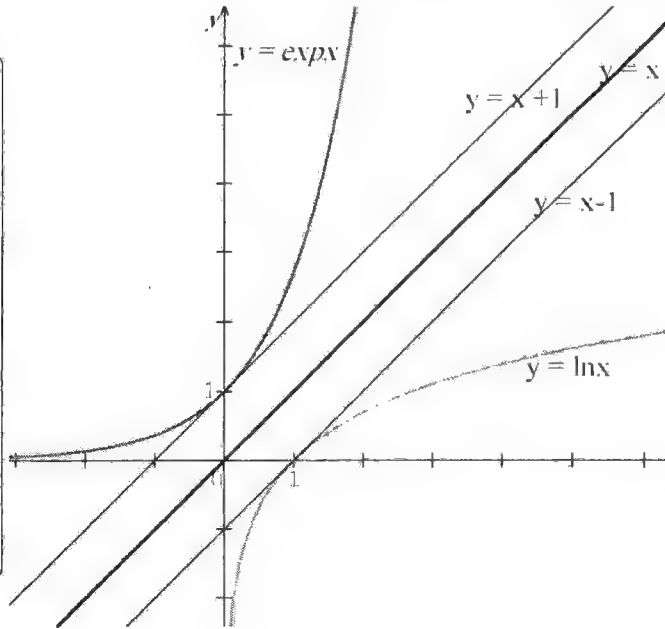
$\ln a < 0$  ، يكافئ  $0 < a < 1$ .

$\ln a > 0$  ، يكافئ  $a > 1$ .

♦ التمثيل البياني للدالتين الأسية واللوغاريتم النيبيري

للدالتين الأسية واللوغاريتم النيبيري تمثيلان بيانيان متناظران بالنسبة

للمستقيم الذي معادلته  $y = x$  (المصنف الأول) في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .



$y = x + 1$  هي معادلة  
المستقيم المماس للمنحنى  
الممثل للدالة  $\exp$  عند  
النقطة ذات الفاصلة 0.  
 $y = x - 1$  هي  
معادلة المستقيم المماس  
للمنحنى الممثل للدالة  
 $\ln$  عند النقطة ذات  
الفاصلة 1.

★ الدالة اللوغاريتم النيبيري

**تعريف**

الدالة اللوغاريتم النيبيري ويرمز لها  $\ln$  هي دالة التقابل العكسي للدالة الأسية؛ ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماماً  $x$  العدد الحقيقي  $\ln x$  والذي عدده الأسّي يساوي  $x$ .

أي من أجل  $x \in \mathbb{R}$  و  $y \in ]0; +\infty[$  :  $e^x = y$  يكافئ  $x = \ln y$  و  $e^{\ln y} = y$  و  $\ln e^x = x$ .

**للحفظ**

**خواص جبرية**

$a$  و  $b$  عدداً حقيقيين موجبان تماماً.

|                                    |                            |
|------------------------------------|----------------------------|
| $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$  | $\ln e = 1$ ، $\ln 1 = 0$  |
| $\ln a^b = b \ln a$                | $\ln ab = \ln a + \ln b$   |
| $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$ | $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$ |

**للحفظ**

**خواص تحليلية**

- دالة عددية معرفة وقابلة للاشتقاق على  $D$ .
- الدالة  $\ln$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$ .
- من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  ،  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .
- إذا كانت  $f \neq 0$  على  $D$  فإن  $(\ln |f|)' = \frac{f'}{f}$ .
- إذا كانت  $f > 0$  على  $D$  فإن  $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$ .
- نجوار  $0$  ،  $\ln(1 + h) \approx h$ .

◆ نهايات الدالتين  $\ln$  و  $\exp$

للحفظ

الدالة الأسية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$$

$$n \in \mathbb{N}^* / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$n \in \mathbb{N}^* / \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

الدالة اللوغاريتم النيبيري

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$n \in \mathbb{N}^* / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$n \in \mathbb{N}^* / \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

في حوار لانهائية، الدالة الأسية تتفوق على دالة القوة ذات الأس الحقيقي، وتتفوق دالة القوة ذات الأس الحقيقي على الدالة اللوغاريتم النيبيري

◆ اللوغاريتم العشري

تعريف

دالة اللوغاريتم العشري يرمز لها  $\log$ ، ومعرفة على  $]0; +\infty[$

$$\log 10 = 1$$

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \quad \text{بما يلي:}$$

◆ الدالة الأسية ذات الأساس  $a$

تعريف

$a$  عدد حقيقي موجب تماماً حيث  $a \neq 1$ .

الدالة الأسية ذات الأساس  $a$ ، (دالة القوة الحقيقية) هي الدالة العددية التي يرمز لها  $\exp_a$  والمعرفة على  $\mathbb{R}$  :-

$$\exp_a x = e^{x \ln a}$$

ونكتب : من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $e^{x \ln a} = a^x$  (تجاوزاً)

للحفظ

$a$  و  $a'$  عدنان حقيقيان موجبان تماماً ويختلفان عن 1.

$x$  و  $y$  عدنان حقيقيان.

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^0 = 1, \quad 1^x = 1$$

$$\left(\frac{a}{a'}\right)^x = \frac{a^x}{a'^x}, \quad (aa')^x = a^x a'^x, \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

◆ دالة الجذر النوبي

تعريف

$n$  عدد طبيعي غير معدوم.

دالة الجذر النوبي، هي الدالة التي نرمر لها  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  والمعرفة على  $[0; +\infty[$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{بـ:}$$

لدينا: من أجل كل  $x$  و  $y$  من  $[0; +\infty[$ ،  $x = y^n$  يكافئ  $y = \sqrt[n]{x}$ .

للحفظ

$x$  و  $y$  عدنان من  $[0; +\infty[$ ،  $n$  و  $m$  عدنان طبيعيان حيث  $n \neq 0$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \quad \text{يكافئ} \quad x = y \quad / \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \quad \text{يكافئ} \quad x < y$$

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}, \quad y \neq 0 \quad \text{حيث} \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}, \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$$

خواص جبرية

خواص تحليلية

• دالة الجذر النوبي  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  معرفة على  $[0; +\infty[$  وقابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$ .

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}, \quad \text{من أجل كل } x \text{ من } ]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right) > 0 \text{ معرفة إذا فقط إذا كان } f, f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)$$

$$D_f = \left]-1; \frac{1}{2}\right[ \cup \left]1; +\infty\right[ \text{ إذا: } x \in \left]-1; \frac{1}{2}\right[ \cup \left]1; +\infty\right[$$

$$f, f(x) = \sqrt{\ln x - 1} \text{ معرفة إذا فقط إذا كان } x > 0 \text{ و } \ln x - 1 > 0 \text{ أي } x > e$$

$$D_f = ]e; +\infty[ \text{ إذا: } x > e$$

$$f, f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) \text{ معرفة إذا فقط إذا كان } e^x - 1 > 0 \text{ أي } x > 0$$

$$D_f = ]0; +\infty[ \text{ إذا: } x > 0$$

### معادلات ومتراجحات لوغاريتمية وأسية

حل في R معادلات والمتراجحات التالية.

$$\ln \sqrt{2x-3} > \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x$$

$$\ln(2x+1) = 2 \ln(x-1)$$

$$\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}} \geq \frac{1}{e^2}$$

$$(e^{x-1} + 2)(e^{x+2} - 1) = 0$$

$$\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 0, e^x < e^{-x} + 1$$

$$e^{6x} - 4e^{3x} + 3 = 0$$

2

الحل:  $\ln(2x+1) = 2 \ln(x-1)$  معرفة إذا فقط إذا كان  $2x+1 > 0$  و  $x-1 > 0$

$$\text{أي } x \in ]1; +\infty[$$

$$\ln(2x+1) = 2 \ln(x-1) \text{ تكافئ } (2x+1) = (x-1)^2 \text{ أي } x=0 \text{ أو } x=4$$

$$\text{بما أن } ]1; +\infty[ \cap \{0\} = \emptyset \text{ فإن مجموعة الحلول } S = \{4\}$$

$$(e^{x-1} + 2)(e^{x+2} - 1) = 0 \text{ معرفة على كامل R}$$

$$(e^{x-1} + 2) \neq 0 \text{ تكون } (e^{x+2} - 1) = 0 \text{ تكافئ } (e^{x-1} + 2)(e^{x+2} - 1) = 0$$

$$\text{تكافئ } x = -2 \text{ إذا مجموعة الحلول } S = \{-2\}$$

$$e^{6x} - 4e^{3x} + 3 = 0 \text{ معرفة على كامل R}$$

$$e^{6x} - 4e^{3x} + 3 = 0 \text{ تكافئ } (X^2 - 4X + 3 = 0 \text{ و } X = e^{3x})$$

### تمارين محلولة

#### مجموعة التعريف للدوال اللوغاريتم والنسبي والدوال الأسية

عُيِّن مجموعة تعريف الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  في كل حالة مما يلي:

$$f(x) = \frac{\ln(-3x+9)}{\ln x - 1}, f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$$

$$f(x) = e^{-x^2+1}, f(x) = \ln(\sqrt{2x^2 - 3x}), f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{-x} - 1}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right), f(x) = \sqrt{\ln x - 1}, f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x^2-1}\right)$$

1

الحل:  $f, f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$  معرفة إذا فقط إذا كان  $2x^2 - 3x + 1 > 0$

$$\text{أي } x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[ \cup \left]1; +\infty\right[ \text{ إذا: } x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[ \cup \left]1; +\infty\right[$$

$$f, f(x) = \frac{\ln(-3x+9)}{\ln x - 1} \text{ معرفة إذا فقط إذا كان}$$

$$\ln x - 1 \neq 0 \text{ و } x > 0 \text{ و } (-3x+9) > 0$$

$$\text{أي } x < 3 \text{ و } x > 0 \text{ و } x \neq e \text{ إذا: } x \in ]0; e[ \cup ]e; 3[$$

$$f, f(x) = \frac{e^x + 1}{e^{-x} - 1} \text{ معرفة إذا فقط إذا كان } e^{-x} - 1 \neq 0 \text{ أي } -x \neq 0$$

$$\text{إذا: } D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f, f(x) = \ln(\sqrt{2x^2 - 3x}) \text{ معرفة إذا فقط إذا كان } 2x^2 - 3x > 0 \text{ أي}$$

$$D_f = \left]-\infty; 0\right[ \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[ \text{ إذا: } x \in \left]-\infty; 0\right[ \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

-x^2+1

$$f, f(x) = e^{-x} \text{ معرفة إذا فقط إذا كان } x \neq 0 \text{ إذا: } D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

## حساب مشتقات لدوال لوغاريتمية أو أسية

عَيِّن الدالة المشتقة للدالة  $f$  في كل حالة.

$$f(x) = x(\ln x^2), \quad f(x) = \ln(-4x^2 + 1), \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln \frac{1}{x} \quad 3$$

$$f(x) = 2^x, \quad f(x) = \ln(e^x - 1), \quad f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 2}, \quad f(x) = \ln \sqrt{1 - x^2}$$

الحل:  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln \frac{1}{x}$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = x - 2 \cdot \frac{-1}{x^2} \times x = x + \frac{2}{x}$$

 $f(x) = \ln(-4x^2 + 1)$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(-4x^2 + 1)'}{(-4x^2 + 1)^2} = \frac{-8x}{(-4x^2 + 1)^2}$$

 $f(x) = x(\ln x^2)$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R} - \{0\}$ ، ولدينا:

$$f'(x) = (\ln x^2)' + (\ln x^2)x = \ln x^2 + 2$$

 $f(x) = \ln \sqrt{1 - x^2}$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $] -1; 1[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{1 - x^2})'}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{1 - x^2}$$

 $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x + 2}$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} + 1)'(e^x + 2) - (e^x + 2)'(e^{2x} + 1)}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^{3x} + 4e^{2x} - e^x}{(e^x + 2)^2}$$

 $f(x) = \ln(e^x - 1)$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

تكافئ ( $X = e^{3x}$  و  $X = 1$  أو  $X = 3$ )تكافئ ( $e^{3x} = 1$  أو  $e^{3x} = 3$ ) تكافئ ( $x = 0$  أو  $x = \frac{1}{3} \ln 3$ )إذاً: مجموعة الحلول  $S = \left\{0; \frac{1}{3} \ln 3\right\}$ . $\ln \sqrt{2x-3} > \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $2x-3 > 0$  و  $6-x > 0$  و  $x > 0$ أي  $x \in \left[\frac{3}{2}; 6\right[$ تكافئ  $\ln \sqrt{2x-3} > \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x$  تكافئ  $\sqrt{2x-3} > \frac{6-x}{\sqrt{x}}$  أي  $2x^2 - 3x > (6-x)^2$ تكافئ  $x^2 + 9x - 36 > 0$  أي  $x \in ]-\infty; -12[ \cup ]3; +\infty[$ إذاً: مجموعة الحلول  $S = \left[\frac{3}{2}; 6\right[ \cap (]-\infty; -12[ \cup ]3; +\infty[)$  أي  $S = ]3; 6[$ .معرفة على كامل  $\mathbb{R}$   $\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}} \geq \frac{1}{e^2}$ تكافئ  $\frac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}} \geq \frac{1}{e^2}$  أي  $e^{2x+1} \geq e^{3x+1}$  أي  $2x+1 \geq 3x+1$  يكافئ  $x \leq 0$ إذاً: مجموعة الحلول  $S = \mathbb{R}$ معرفة على كامل  $\mathbb{R}$   $e^x < e^{-x} + 1$ تكافئ  $e^x < e^{-x} + 1$  تكافئ  $e^{2x} - e^x - 1 < 0$  تكافئ ( $e^x = X$  و  $X^2 - X - 1 < 0$ )تكافئ  $e^x \in \left]0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$  أي  $x \in \left]-\infty; \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$  و  $x \in \left]-\infty; \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right[$ معرفة إذا وفقط إذا كان  $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 0$  أي  $\frac{x-1}{2x-3} > 0$  أي  $x \in ]-\infty; 1[ \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ تكافئ  $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 0$  أي  $\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) \geq 1$  أي  $(-x+2)(2x-3) \geq 0$  أي  $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ وبالتالي:  $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right] \cap \left(]-\infty; 1[ \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[)\right)$  إذاً: مجموعة الحلول  $S = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ .



$$a = \frac{\sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[12]{3^5}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{7}{4}}}{3^{\frac{5}{12}}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{7}{4} - \frac{5}{12}} = 3^9 = 9$$

$$b = \frac{2^{\sqrt{3}} \times 8^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{(0.5)^{\sqrt{3}}} = 2^{\sqrt{3}} \times (2^3)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \times 2^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}} = 2^{3\sqrt{3}}$$

## تمارين للتدريب

1. حل في R المعادلات والمتراجحات التالية.

$$\frac{e^{2x} + 2e^x - 4}{2 - 3e^x} = -1, e^{2x} - 4e^{-2x} = 3, e^x - 2e^{\frac{x}{2}} - 5 = 0$$

$$(\ln x)^2 - 3 \ln x - 28 = 0, \ln(x^2 - 1) + 2 \ln 2 = \ln(4x - 1)$$

$$\ln|x-1| - \ln 5 \geq \ln \frac{1}{|x+5|}, \frac{3e^{2x} - 5e^x - 1}{e^{2x} - 4} \leq 1, e^{2x^2 - 3x - 5} \geq e^4$$

$$e^{2x} + e^x > 2, \ln \sqrt{4 - x^2} \leq \frac{1}{2} \ln 3x$$

2. حل في  $R \times R$  كلا من الجمل التالية.

$$\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ e^{2(x+y)} = 36 \end{cases}, \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = 1 \end{cases}, \begin{cases} \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln y} = \frac{7}{3} \\ \ln(xy) = \frac{7}{2} \end{cases}, \begin{cases} \ln(xy) = 3 \\ (\ln x)(\ln y) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x \times e^y = a^2 \\ xy = 1 \end{cases}, \begin{cases} \ln x - 2 \ln y = \ln 2 \\ \frac{e^x}{e^y} = \left(\frac{1}{e^y}\right)^3 \end{cases}$$

(نناقش حسب قيم العدد الحقيقي الموجب  $a$ )

$f(x) = 2^x$  وتكتب  $f(x) = e^{x \ln 2}$ ، قابلة للاشتقاق على  $R$ ، ولدينا:  $f'(x) = (\ln 2) e^{x \ln 2} = 2^x \ln 2$ .

## حساب النهايات

احسب النهايات عند أطراف مجالات التعريف للدالة  $f$  في كل حالة. $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = x - 2 \ln x$  $f$  معرفة على  $R$  بالدستور:  $f(x) = x + 1 - e^x$  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = x \ln \left( \frac{1+x}{x} \right)$  $f$  معرفة على  $R$  بالدستور:  $f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$ 

4

الحل:  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2 \ln x) = 0 - 2(-\infty) = +\infty$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty(1 - 0) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = +\infty(1 + 0 - \infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 - e^x) = -\infty + 1 - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{1+x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left( \frac{1+x}{x} \right)}{\frac{1}{1+x} - 1} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left( \frac{1+x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x) \frac{\ln \left( \frac{1+x}{x} \right)}{\frac{1}{1+x} - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} \right) = \frac{0+1}{0+1} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2e^x + 1}{e^x + 1} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( \frac{2X + 1}{X + 1} \right) = 2$$

## الحساب على القوى الحقيقية والجذور النونية

$$b = \frac{2^{\sqrt{3}} \times 8^{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{(0.5)^{\sqrt{3}}}, a = \frac{\sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[12]{3^5}} \quad \text{بسط الكتابين التاليين:}$$

5

## 3. حساب النهايات

| الدالة $f$ معرفة بالدستور            | احسب نهاية $f$ عند          |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| $f(x) = \frac{e^x}{x} - x$           | $-\infty$ و $+\infty$ و $0$ |
| $f(x) = e^{2x} - e^x$                | $-\infty$ و $+\infty$       |
| $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{3x}$       | $-\infty$ و $+\infty$ و $0$ |
| $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x+4}$        | $+\infty$                   |
| $f(x) = \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{2x}$ | $-\infty$ و $+\infty$ و $0$ |
| $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$       | $-\infty$ و $+\infty$       |
| $f(x) = x - \ln 2e^x - 1 $           | $-\infty$ و $+\infty$       |

4. الدالة العددية المعرفة على  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = 2 \ln x - (\ln x)^2$

- ادرس تغيرات الدالة  $f$ ، ثم حل المعادلة  $f(x) = 0$ .
- أعط معادلة ديكارتية للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(C)$  الممثل للدالة  $f$ ، عند النقطة ذات الفاصلة 1.

- أرسم  $(T)$  و  $(C)$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

5. الدالة العددية المعرفة على  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

- ادرس تغيرات الدالة  $g$ ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$ .
- الدالة المعرفة على  $]0; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x$ .  $f(x)$  تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

• ادرس تغيرات الدالة  $f$ . (نستعين بنتائج السؤال الأول)

- أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = -x$ .

- يبين أنه توجد نقطة وحيدة  $A$  من المنحنى  $(C_f)$  يكون المماس عندها للمنحنى  $(C_f)$ .

يوازي المستقيم  $(\Delta)$ ، يطلب تعيين إحداثياتها. أنشئ  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .

6. الدالة المعرفة على  $\{1\}$ -R بالدستور:  $f(x) = \frac{x+1}{-x+1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني

في المستوي  $(P)$  المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- يبين أن النقطة  $A$  ذات الإحداثيات  $(1; -1)$  هي مركز تناظر للمنحنى  $(C_f)$ ، ثم أنشئ  $(C_f)$ .

• الدالة العددية المعرفة على  $R^*$  بالدستور:  $g(x) = \frac{e^x + 1}{-e^x + 1}$

يبين أن الدالة  $g$  فردية، ثم احسب نهاياتها عند أطراف مجالات التعريف.

- تعرّف على اتجاه تغير الدالة  $g$  وارسم تمثيلها البياني  $(C_g)$  في المستوي  $(P)$ .

• الدالة العددية المعرفة على  $R^* - \{e\}$  بالدستور:  $h(x) = \frac{\ln x + 1}{-\ln x + 1}$

أدرس تغيرات  $h$ ، ثم يبين أن  $h$  تقابل من المجال  $[1; \sqrt{e}]$  نحو  $[1; 3]$ .

استخرج عبارة  $h^{-1}(x)$  من أجل  $x \in [1; 3]$ .

7. الدالة العددية المعرفة على  $R$  بالدستور:  $f(x) = e^x - x - 4$

- ادرس تغيرات الدالة  $f$ . يبين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $x + y + 4 = 0$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$ ، ثم ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(D)$ .
- أرسم  $(C_f)$  و  $(D)$ .

8. الدالة العددية المعرفة على  $] -1; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = x - \ln(x+1)$

- احسب نهايات الدالة  $f$  عند أطراف مجموعة تعريفها.
- ادرس تغيرات الدالة  $f$  وارسم تمثيلها البياني. استنتج إشارة الدالة  $f$  على المجال  $] -1; +\infty[$ .
- باستعمال إشارة  $f$ ، تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ ، لدينا:

$$\ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) < \frac{1}{n}$$

- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ ، لدينا:  $\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n < e$

## 4- المتتاليات العددية

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ عموميات

تعريف

$n_0$  عدد طبيعي معطى.

المتتالية العددية  $u$  هي كل دالة من  $N$  نحو  $R$ ، والتي ترفق بكل عدد طبيعي  $n$  أكبر من أو يساوي  $n_0$ ، العدد الحقيقي  $u(n)$ .

المجموعة  $I$  حيث  $I = \{n : n \in N / n \geq n_0\}$  تدعى مجموعة تعريف المتتالية العددية  $u$ . (بمجال من  $N$  يبدأ من  $n_0$ )

يرمز كذلك للمتتالية العددية  $u$  بـ:  $(u_n)_{n \geq n_0}$  أو  $(u_n)_{n \in I}$ .

أو يستعمل الرمز  $(u_n)$  مع ذكر مجموعة تعريفها.

يرمز كذلك للعدد الحقيقي  $u(n)$  بـ:  $u_n$  ويدعى الحد العام للمتتالية العددية  $u$ .

◆ طريقتي توليد متتالية عددية

تعيّن متتالية عددية بإحدى الطريقتين:

• تعطى عبارة حلها العام، أي عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  (دستور الدالة  $f$ ) ونكتب:  $u_n = f(n)$ .

$f$  تدعى الدالة المرفقة بالمتتالية العددية  $u$ .

• تعطى علاقة بين حدود متعاقبة للمتتالية العددية (تدعى علاقة تراجعية).

- هنا نكتفي بالعلاقة بين حدين متتاليين - ونكتب:  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

$f$  تدعى الدالة المرفقة بالمتتالية العددية  $u$ .

$f$  تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $D_f$  لدينا:  $f(x) \in D_f$  و  $u_{n_0} \in D_f$ .

9.  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $]1; +\infty[$  بالدستور:  $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{3x+4}\right)$  و

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى  $(P)$  المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, \vec{i}; \vec{j})$ .

• ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

• بين أن المستقيم  $(D)$  الذي معادلته  $y' = \frac{1}{2}x - \ln 3$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$ .

• ثم ادرس وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(D)$ .

• ارسم المستقيم  $(D)$  والمنحنى  $(C_f)$ .

•  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $]1; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$  بالدستور:  $g(x) = f(|x|)$ .

• علّل زوجية الدالة  $g$ .

• باستعمال الدراسة السابقة للدالة  $f$ ، ارسم جدولاً كاملاً لتغيرات للدالة  $g$ .

• اشرح كيف يمكننا رسم التمثيل البياني  $(C_g)$  للدالة  $g$  انطلاقاً من  $(C_f)$ .

• ارسم  $(C_g)$ .

10.  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $R$  كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = e^x - x & / x < 0 \\ f(x) = \cos^2 \pi x & / 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} & / x > 1 \end{cases}$$

ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة  $f$ . ثم تغيرات الدالة  $f$  وارسم  $(C_f)$ .

## ◆ اتجاه تغير متتالة عددية.

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $I$  حيث  $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

و  $n_0$  عدد طبيعي معطى.

$(u_n)$  متزايدة تماماً على  $I$  معناه  $[ \text{من أجل كل } n \text{ من } I, u_{n+1} - u_n > 0 ]$

$(u_n)$  متناقصة تماماً على  $I$  معناه  $[ \text{من أجل كل } n \text{ من } I, u_{n+1} - u_n < 0 ]$

$(u_n)$  متزايدة على  $I$  معناه  $[ \text{من أجل كل } n \text{ من } I, u_{n+1} - u_n \geq 0 ]$

$(u_n)$  متناقصة على  $I$  معناه  $[ \text{من أجل كل } n \text{ من } I, u_{n+1} - u_n \leq 0 ]$

$(u_n)$  ثابتة على  $I$  معناه  $[ \text{من أجل كل } n \text{ من } I, u_{n+1} - u_n = 0 ]$

## طريقة

لتعيين اتجاه تغير متتالية عددية على  $I$ ، ندرس إشارة الفرق  $u_{n+1} - u_n$

أو نقارن النسبة  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  مع 1، وهذا فقط في حالة  $(u_n)$  موجبة تماماً.

## حالة خاصة 1.

من أجل المتتالية المعرفة بـ:  $u_n = f(n)$  على المجموعة  $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

إذا كانت الدالة  $f$  متزايدة (أو متناقصة) على  $[n_0; +\infty[$  فإن المتتالية  $(u_n)$

متزايدة (أو متناقصة) على  $I$ .

أنتبه: عكس هذه النتيجة غير صحيح

## حالة خاصة 2.

من أجل المتتالية المعرفة بالعلاقة التراجعية:  $u_{n+1} = f(u_n)$  على المجموعة

$$I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$$

لدينا:  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = f(x) - x$ ، للتعرف على اتجاه

تغير المتتالية  $(u_n)$  يكفي دراسة إشارة الفرق  $f(x) - x$  على المجموعة  $D_f$ .

أو لدينا:  $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ ، للتعرف على اتجاه تغير

المتتالية  $(u_n)$  يكفي دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  على  $D_f$ .

## ◆ المتتالية العددية المحدودة

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $I$  حيث  $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$  و  $n_0$  عدد طبيعي معطى.

المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد الحقيقي  $M$  إذا وفقط إذا كان من أجل كل

$$n \text{ من } I, u_n \leq M.$$

المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأسفل بالعدد الحقيقي  $m$  إذا وفقط إذا كان من أجل كل

$$n \text{ من } I, u_n \geq m.$$

المتتالية  $(u_n)$  محدودة إذا وفقط إذا كانت للمتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى ومن الأسفل.

## ◆ متاليات مرجعية ونهايتها

المتاليات المعرفة بـ  $n^2$ ،  $n^3$ ،  $\sqrt{n}$  هي مرجعية نهايتها هي  $+\infty$ .

المتاليات المعرفة بـ  $\frac{1}{n}$ ،  $\frac{1}{n^2}$ ،  $\frac{1}{n^3}$ ،  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  هي مرجعية نهايتها هي 0.

## ◆ المتتالية المتقاربة والمتتالية المتباعدة

## تعريف

المتتالية العددية المتقاربة نحو العدد الحقيقي  $l$  هي التي تقبل نهاية

محدودة  $l$  عندما ينتهي  $n$  إلى  $+\infty$ .

المتتالية العددية المتباعدة هي المتتالية العددية غير المتقاربة.

## طريقة

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $I$  حيث  $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$  و

$n_0$  عدد طبيعي معطى.

• للبرهان أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو 0. يمكننا أن نبين أنه:

يوجد عدد طبيعي  $n'$  بحيث، (إذا كان  $n \geq n'$  فإن  $|u_n| \leq kv_n$ )

حيث:  $(v_n)$  متتالية مرجعية متقاربة نحو 0، و  $k \in \mathbb{R}$ .

• للبرهان أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة نحو العدد الحقيقي  $l$ . يمكننا أن نبين أن المتتالية

$(u_n - l)$  متقاربة نحو 0. ويمكننا أن نبين كذلك أنه: يوجد عدد طبيعي  $n'$

بحيث: (إذا كان  $n \geq n'$  فإن  $w_n \leq u_n \leq v_n$ )

حيث:  $(v_n)$  و  $(w_n)$  متتاليتان مرجعيتان متقاربتان نحو 0.

## مبرهنة 1

كل متتالية مقاربة هي متتالية محدودة.

كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى هي متتالية مقاربة.

كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل هي متتالية مقاربة.

## المتاليتان المتجاورتان

## تعريف

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان عدديتان متجاورتان معناه  $(u_n)$  متزايدة

و  $(v_n)$  متناقصة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

## مبرهنة 2

كل متتاليتين متجاورتين هما متتاليتان متقاربتين نحو

نفس العدد الحقيقي  $l$ .

## ملاحظة

• إذا كانت  $(u_n)_{n \in I}$  و  $(v_n)_{n \in I'}$  متتاليتان عدديتان متجاورتان، حيث

$(u_n)$  متزايدة و  $(v_n)$  متناقصة فإنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  من

$I \cap I'$  لدينا:  $u_n \leq v_n$ .

• إذا كانت  $(u_n)_{n \in I}$  و  $(v_n)_{n \in I'}$  متتاليتان عدديتان متجاورتان، حيث

$(u_n)$  متزايدة و  $(v_n)$  متناقصة وكانت لهما نفس النهاية  $l$  فإنه، من أجل

كل عدد طبيعي  $n$  من  $I \cap I'$  لدينا:  $u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n$

## مبرهنة 3

$(u_n)$  متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية:  $u_{n+1} = f(u_n)$

إذا كانت  $(u_n)$  مقاربة نحو  $l$  وكانت الدالة  $f$  مستمرة عند  $l$  فإن،  $f(l) = l$

## المتتالية الحسابية

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $I$  حيث  $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$  و  $n_0$  عدد طبيعي معطى.

• المتتالية  $(u_n)$  حسابية حدها الأول  $u_{n_0}$  وأساسها  $r$  إذا وفقط إذا كانت معرفة

بـ:  $u_{n+1} = u_n + r$  من أجل كل  $n$  من  $I$  (العلاقة التراجعية)

أو  $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$  من أجل كل  $n$  من  $I$  (عبارة الحد العام)

• من أجل كل عددين طبيعيين  $n$  و  $p$  من  $I$ ، لدينا:  $u_n = u_p + (n - p)r$

• من أجل كل عددين طبيعيين  $n$  و  $p$  من  $I$  حيث:  $p \leq n$

لدينا:  $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{n - p + 1}{2} (u_n + u_p)$

$(n - p + 1)$  يمثل عدد الحدود المتتالية التي تجمع من  $u_p$  إلى  $u_n$ .

• التمثيل البياني للمتتالية الحسابية  $(u_n)$  هو مجموعة النقاط  $M(n; u_n)$  التي تنتمي إلى

المستقيم الذي معامل توجيهه الأساس  $r$ .

## المتتالية الهندسية

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $I$  حيث  $I = \{n: n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$  و  $n_0$  عدد طبيعي معطى.

• المتتالية  $(u_n)$  هندسية حدها الأول  $u_{n_0}$  وأساسها  $q$  إذا وفقط إذا كانت معرفة

بـ:  $u_{n+1} = u_n \times q$  من أجل كل  $n$  من  $I$  (العلاقة التراجعية)

أو  $u_n = u_{n_0} \times q^{(n - n_0)}$  من أجل كل  $n$  من  $I$  (عبارة الحد العام)

• من أجل كل عددين طبيعيين  $n$  و  $p$  من  $I$ ، لدينا:  $u_n = u_p \times q^{(n - p)}$

• من أجل كل عددين طبيعيين  $n$  و  $p$  من  $I$  حيث:  $p \leq n$

لدينا:  $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{(n - p + 1)}}{1 - q}$  حيث  $q \neq 1$ .

$(n - p + 1)$  يمثل عدد الحدود المتتالية التي تجمع من  $u_p$  إلى  $u_n$ .

## نهايات متتالية هندسية:

إذا كان  $q > 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ ، إذا كان  $q = 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

إذا كان  $-1 < q < 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ ، إذا كان  $q \leq -1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$  غير موجودة



$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \quad \text{صحيحة فرضاً.}$$

نبرهن صحة الخاصية  $P_{k+1}$  أي نبين أن:  $1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$   
لدينا:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + (k+1)^2 &= 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\ &\quad \underbrace{\alpha \in N / 3^{2n} - 2^n = 7\alpha}_{P_n}, \quad N \text{ من } n \text{ كل} \end{aligned}$$

نتحقق من صحة الخاصية  $P_0$ :  $3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 7 \times 0$ .  $P_0$  محققة

نفرض صحة الخاصية  $P_n$  إلى الرتبة  $k$  حيث:  $k \geq 0$ . أي أن:

$$\alpha \in N / 3^{2k} - 2^k = 7\alpha \quad \text{صحيحة فرضاً.}$$

نبرهن صحة الخاصية  $P_{k+1}$  أي نبين أن:  $\beta \in N / 3^{2(k+1)} - 2^{k+1} = 7\beta$

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)} - 2^{k+1} &= 3^2 \times 3^{2k} - 2 \times 2^k = 9(7\alpha + 2^k) - 2 \times 2^k \\ &= 63\alpha + 7 \times 2^k = 7(9\alpha + 2^k) = 7\beta \\ &\quad \text{حيث } \beta = (9\alpha + 2^k) \in N \end{aligned}$$

### اتجاه تغير متتالية عددية

تعرف على اتجاه تغير المتتالية العددية في كل حالة.

$$u_n = \frac{n+4}{n+2} \quad \text{متتالية عددية معرفة على } N \text{ بالعلاقة:}$$

$$k_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \quad \text{متتالية عددية معرفة على } N \text{ بالعلاقة:} \quad 2$$

$v_n$  متتالية عددية معرفة على  $N$  بحدها الأول  $v_0 = 1$  والعلاقة التراجعية:

$$v_{n+1} = 2 + \ln v_n$$

### البرهان بالتراجع

$P_n$  خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي  $n$  من المجموعة  $I = \{n: n \in N / n \geq n_0\}$  حيث  $n_0$  عدد طبيعي معطى.

للبرهان بالتراجع على أن الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل كل  $n$  من  $I$ ، تتبع المراحل الثلاث التالية:

① نتحقق من صحة الخاصية  $P_{n_0}$  ( هذه المرحلة تدعى بداية التراجع )

② نفرض أن الخاصية  $P_n$  صحيحة إلى غاية الرتبة  $k$  حيث:  $k \geq n_0$ .

( هذه المرحلة تدعى فرضية التراجع )

③ نبرهن أن الخاصية  $P_{k+1}$  صحيحة. ( هذه المرحلة تدعى برهان التراجع )

( المرحلتين ② و ③ تدعى استلزام التراجع )

### تمارين محلولة

### البرهان بالتراجع

برهن بالتراجع صحة العبارتين التاليتين.

$$\begin{aligned} 1. \quad & 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad N^* \text{ من } n \text{ كل} \\ & \text{من أجل كل } n \text{ من } N, \quad 3^{2n} - 2^n \text{ يقبل القسمة على } 7. \end{aligned}$$

$$\text{الحل: من أجل كل } n \text{ من } N^*, \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad \underbrace{P_n}_{P_n}$$

نتحقق من صحة الخاصية  $P_1$ :  $1^2 = \frac{1}{6}1(1+1)(2 \times 1 + 1)$ .  $P_1$  محققة

نفرض صحة الخاصية  $P_n$  إلى الرتبة  $k$  حيث:  $1 \leq k$ . أي أن:

## دراسة تقارب متتالية عددية

• بين أن المتاليات العددية التالية متقاربة.

•  $(u_n)$  معرفة على  $N^*$  بالعلاقة:  $u_n = \frac{n+4}{n^2}$

•  $(v_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $v_n = \frac{n^2-1}{n^2-n+2}$

•  $(k_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $k_n = \frac{n-11}{2^n}$

•  $(w_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $w_n = \frac{3^n+2^n}{4^n-5^n}$

• بين أن المتتالية  $(h_n)$  المعرفة على  $N$  بالعلاقة:  $h_n = \frac{n^3-1}{n^2+2}$  متباعدة

3

الحل:  $(u_n)$  معرفة على  $N^*$  بالعلاقة:  $u_n = \frac{n+4}{n^2}$

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $R^*$  بالدستور  $f(x) = \frac{x+4}{x^2}$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

إذاً:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  ، وبالتالي،  $(u_n)$  متقاربة نحو 0.

$(v_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $v_n = \frac{n^2-1}{n^2-n+2}$ . نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على

$R$  بالدستور  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x+2}$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

إذاً:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$  ، وبالتالي،  $(v_n)$  متقاربة نحو 1.

$(k_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $k_n = \frac{n+11}{2^n}$

نلاحظ أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $\frac{n+11}{2^n} > 0$ . معناه أن المتتالية  $(k_n)$  محدودة من الأسفل.

ولدينا:  $k_{n+1} - k_n = \frac{1}{2^{n+1}}(n+12-2n-22) = -\frac{n+10}{2^{n+1}} < 0$

الحل:  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $u_n = \frac{n+4}{n+2}$

لدينا: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $u_{n+1} - u_n = \frac{n+5}{n+3} - \frac{n+4}{n+2} = \frac{-2}{(n+2)(n+3)} < 0$

إذاً المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $N$ .

•  $(k_n)$  متتالية عددية معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $k_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

( يمكن العمل بطريقة المثال الأول كما يمكن العمل بالطريقة التالية )

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $R - \{-1\}$  بالدستور  $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ . وندرس اتجاه تغيراتها فقط على  $R_+$ .

من أجل كل  $x$  من  $R_+$ ،  $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^3} > 0$ ، أي  $f$  متزايدة تماماً على  $R_+$ ؟

وبالتالي المتتالية  $(k_n)$  متزايدة تماماً على  $N$ .

•  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة على  $N$  بحدها الأول  $v_0 = 1$  والعلاقة التراجعية:  $v_{n+1} = 2 + \ln v_n$

للتعرف على تغيراتها نتبع ما يلي:

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $R_+$  بالدستور  $f(x) = 2 + \ln x$  وندرس اتجاه تغيراتها على  $R_+$ .

اتجاه تغير الدالة  $f$  نفسه اتجاه تغير الدالة  $\ln$  كون:  $f = \ln + 2$  إذاً  $f$  متزايدة تماماً على  $R_+$ .

لدينا:  $v_{n+1} - v_n = f(v_n) - f(v_{n-1})$  نعلم إذاً على اتجاه تغير الدالة  $f$  وعلى البرهان

بالتراجع لمقارنة  $v_n$  و  $v_{n+1}$ .

$v_0 = 1$  و  $v_1 = 2$  أي  $v_1 > v_0$  ( بداية التراجع )

نفرض أن  $v_{k+1} > v_k$  حيث  $k \in N$  ( فرضية التراجع )

وبما أن  $f$  متزايدة تماماً على  $R_+$  فإن  $v_{k+1} > v_k$  تستلزم  $f(v_{k+1}) > f(v_k)$  أي

$v_{k+2} > v_{k+1}$  ( برهان التراجع )

إذاً: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $v_{n+1} > v_n$  ، وبالتالي:  $(v_n)$  متزايدة تماماً على  $N$ .

## المتتالية الهندسية

نعرف المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  على المجموعة  $N$  بـ:  $u_0 = 1$  ،

$$v_0 = 2 \text{ و من أجل كل } n \text{ من } N ،$$

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$$

• نضع:  $w_n = v_n - u_n$  من أجل كل  $n$  من  $N$ .

• بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين نهايتها والتعبير  $w_n$  عن بدلالة  $n$ .

• عبّر عن العددين  $u_{n+1} - u_n$  و  $v_{n+1} - v_n$  بدلالة  $w_n$  ، واستنتج اتجاه تغير المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$ .

• بين أن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متقاربتان ولهما نفس النهاية  $l$ .

• نضع:  $l_n = 3u_n + 10v_n$  من أجل كل  $n$  من  $N$ . بين أن المتتالية  $(l_n)$  ثابتة واستنتج قيمة  $l$ .

5

**الحل:** واضح أن  $(w_n)$  متتالية عددية كمجموع المتتاليتين  $(v_n)$  و  $(-u_n)$ .

من أجل كل  $n$  من  $N$  ،

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 12v_n - 5u_n - 10v_n}{15} = \frac{2}{15} w_n$$

يعني أن المتتالية  $(w_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{15}$  وحدها الأول  $w_0 = v_0 - u_0 = 1$

بما أن  $\frac{2}{15} \in ]-1; 1[$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$  . ولدينا من أجل كل  $n$  من  $N$  ،

$$w_n = w_0 \left( \frac{2}{15} \right)^n = \left( \frac{2}{15} \right)^n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3} = \frac{2}{3} w_n ، N \text{ من أجل كل } n$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n = \frac{u_n + 4v_n - 5v_n}{5} = -\frac{1}{5} w_n \text{ و}$$

$(k_n)$  متناقصة تماماً على  $N$ .

كون المتتالية  $(k_n)$  متناقصة تماماً ومحدودة من الأسفل ، فهي متقاربة.

$(w_n)$  معرفة على  $N$  بالعلاقة:  $w_n = \frac{3^n + 2^n}{4^n - 5^n}$  . ولدينا:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n \left( \left( \frac{3}{5} \right)^n + \left( \frac{2}{5} \right)^n \right)}{5^n \left( \left( \frac{4}{5} \right)^n - 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left( \frac{3}{5} \right)^n + \left( \frac{2}{5} \right)^n}{\left( \frac{4}{5} \right)^n - 1} = \frac{0+0}{0-1} = 0$$

يعني أن  $(w_n)$  متقاربة نحو 0.

المتتالية  $(h_n)$  المعرفة على  $N^*$  بالعلاقة:  $h_n = \frac{n^3 - 1}{n^2 + 2}$  متباعدة كون

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^2} = +\infty \text{ (غاية غير محدودة).}$$

## المتتاليتان المتجاورتان

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $N^*$  بـ:

$$v_n = u_n + \frac{1}{n} \text{ و } u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

4

بين أن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

**الحل:** لدينا من أجل كل  $n$  من  $N$  ،

$$u_{n+1} - u_n = \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \left( 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \left( u_{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) - \left( u_n + \frac{1}{n} \right) = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 ، N \text{ من أجل كل } n$$

يعني أن  $(u_n)$  متزايدة تماماً على  $N$  و أن  $(v_n)$  متناقصة تماماً على  $N$ .

وكذلك لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  إذاً المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

بما أنه من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $w_n = \left(\frac{2}{15}\right)^n > 0$ ، فإن  $u_{n+1} - u_n > 0$  و  $v_{n+1} - v_n < 0$ . أي  $(u_n)$  متزايدة تماماً على  $N$  و  $(v_n)$  متناقصة تماماً على  $N$ .

حسب ما سبق لدينا  $(u_n)$  متزايدة تماماً على  $N$  و  $(v_n)$  متناقصة تماماً على  $N$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$  هذا يعني أن

المتالتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان، وبالتالي فهما متقاربتان ولهما نفس النهاية  $l$ .

من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = 3 \frac{u_n + 2v_n}{3} + 10 \frac{u_n + 4v_n}{5} = t_n$ ، يعني أن المتتالية  $(t_n)$  ثابتة.

إذاً:  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_0 = 23$  ومن جهة أخرى

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3u_n + 10v_n) = 3l + 10l = 13l$$

منه  $13l = 23$  أي  $l = \frac{23}{13}$ .

### تمارين للتدريب

1. نقبل أن الكثير حدود ذو المعاملات الحقيقية  $P(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$  يحقق

$$P(x+1) - P(x) = x^2, \quad x \text{ من } R$$

• بدون تعيين العاديين  $a$  و  $b$  أحسب  $P(0)$ ،  $P(1)$ ،  $P(-1)$ . احسب إذا العددين  $a$  و  $b$ .

• برهن بالتراجع أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $P(n)$  عدد طبيعي.

• نضع:  $S_1 = 1$  و من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $S_n = 1 + 2^2 + \dots + n^2$ ، بين أن

$$S_n = P(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

•  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $N$  بـ:  $u_0 = 0$  و من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ .

• برهن بالتراجع أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ، المتتالية  $(u_n)$  موجبة.

• اكتشف وبرهن بالتراجع اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)_{n \in N}$ .

2.  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $N$  بـ:  $u_0 = 8$  و من أجل كل  $n$  من  $N$ ،

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n}$$

• مثل في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  الدالة  $f: x \mapsto \frac{5x-4}{x}$

والمستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$ .

• مثل بيانها الحدود  $u_0, u_1, u_2$ . هل يمكننا التوقع بتقارب المتتالية  $(u_n)$ ؟

• بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل، ثم عيّن نهايتها.

3. من أجل كل  $n$  من  $N - \{0, 1\}$ ، نعرف على المجال  $]0, +\infty[$  الدالة  $f_n$

$$f_n(x) = x^n(2 \ln x - 1)$$

• عيّن الدالة المشتقة  $f'_n$ ، ثم بين أنها تنعدم مرة واحدة على المجال  $]0, +\infty[$  عند العدد الحقيقي  $\alpha_n$  يطلب تعيينه.

• بين أنه من أجل كل  $n$  من  $N - \{0, 1\}$ ،  $1 \leq \alpha_n < \sqrt{e}$ .

• ادرس اتجاه تغير المتتالية العددية  $(\alpha_n)$ ، ثم حدد سلوكها بجوار  $+\infty$ .

4.  $(u_n)$  متتالية عددية موجبة معرفة على  $N^*$  بـ:  $u_1 = 1$  و من أجل كل  $n$

$$n^2 u_n^2 - (n-1)^2 u_{n-1}^2 = n, \quad n \in N^* - \{1\}$$

$(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $N^*$  بـ:  $v_n = n^2 u_n^2$ . عيّن  $v_n$  بدلالة  $n$  واستنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة وعيّن نهايتها.

5.  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $N$  بـ:  $u_0 = -1$  و من أجل كل  $n$  من  $N$ ،

$$u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$$

• بين أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد 3. بين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة واحسب نهايتها.

•  $(v_n)_{n \in N}$  متتالية معرفة بـ:  $v_n = \frac{-1}{3 - u_n}$  بين أن المتتالية  $(v_n)$  حساسية، يطلب

تعيين حدها الأول وأساسها.

أحسب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$ ، ثم أوجد نهاية  $(u_n)$ .

6.  $(u_n)$  متسالية معرفة على  $N^*$  بـ:  $u_1 = 7$  ومن أجل كل  $n$  من  $N^*$ ،

$$u_{n+1} = au_n + 5 \quad a \in \mathbb{R}.$$

نضع: من أجل كل  $n$  من  $N^*$ ،  $v_n = u_n - 6$ .

• عيّن العدد الحقيقي  $a$  حتى تكون  $(v_n)$  متسالية هندسية، يطلب تعيين حلها الأول وأساسها.

• فيما يلي نعتبر  $a = \frac{1}{6}$ ، احسب إذن  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم نهاية  $(v_n)$ .

• نضع:  $S_n = \sum_{i=1}^n v_i$ ، أحسب  $S_n$  بدلالة  $n$ ، وادرس تقارب المتسالية  $(S_n)_{n \in N^*}$ ، ثم احسب نهايتها.

7. نعرّف متسالتين عدديتين  $u$  و  $v$  بـ:  $u_1 = 1$  و  $v_1 = 12$

ومن أجل كل  $n$  من  $N^*$ ،  $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$  و  $v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n)$

من أجل كل  $n$  من  $N^*$  نضع:  $w_n = v_n - u_n$  بين أن  $(w_n)$  متسالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

• أحسب  $w_1$  ثم عبّر عن  $w_n$  بدلالة  $n$ ، أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .

• بين أن المتسالية  $u$  متزايدة وأن المتسالية  $v$  متناقصة، بالاستعانة بالسؤال الأول.

• ماذا تستنتج عن المتسالتين  $u$  و  $v$ ؟

• من أجل كل  $n$  من  $N^*$  نضع:  $k_n = 8v_n + 3u_n$  بين أن المتسالية  $(k_n)$  ثابتة.

• استنتج نهايتي كلا  $u$  و  $v$ .

8.  $g$  الدالة المعرفة على  $]-3; +\infty[$  بالدستور:  $g(x) = \ln(x+3)$ .

• ادرس تغيرات الدالة  $g$ .

•  $(u_n)$  المتسالية العددية المعرفة على  $N$  بـ:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل  $n$  من  $N$ ،

$$u_{n+1} = g(u_n)$$

باستعمال السؤال الأول — نعرّف على اتجاه تغير المتسالية  $(u_n)$ .

• بين أن المتسالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد 2. هل هي متقاربة؟ نعرّف على  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

•  $(v_n)$  المتسالية العددية المعرفة على  $N$  بـ:  $v_0 = 2$  ومن أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $v_{n+1} = g(v_n)$ .

بين أن المتسالية  $(v_n)$  محدودة من الأسفل بالعدد 1. هل هي متقاربة؟ نعرّف على  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

• بين أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ ، استنتج أن المتسالتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

•  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالدستور:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  و  $h$  الدالة المعرفة

$$h(x) = f(x) - \frac{x}{2} \quad \text{على } \mathbb{R} \text{ بالدستور:}$$

ادرس تغيرات الدالة  $h$ ، واستنتج إشارة العدد  $h(x)$  حسب قيم  $x$ .

•  $(w_n)$  المتسالية العددية المعرفة على  $N$  بـ:  $w_0 = 1$  ومن أجل كل  $n$  من  $N$ ،

$$w_{n+1} = f(w_n)$$

بين أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $0 \leq w_{n+1} \leq \frac{1}{2} w_n$ ، واستنتج أن:  $0 \leq w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

• نعرّف على  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ .

9.  $(u_n)$  المتسالية العددية المعرفة بـ:  $u_0 = 3$  ومن أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$

• بين أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $0 \leq u_n \leq 3$ .

• واستنتج أن هذه المتسالية  $(u_n)$  معرفة فعلا على  $N$ .

• نضع:  $a_n = u_{2n}$  و  $b_n = u_{2n+1}$  من أجل كل  $n$  من  $N$ .

• ادرس اتجاه تغير المتسالتين العدديتين  $(a_n)$  و  $(b_n)$ .

• بين أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $b_n \leq 1 \leq a_n$ .

• استنتج أن المتسالية  $(u_n)$  إذا تقاربت فهي تقارب نحو 1.

10.  $(k_n)$  المتسالية العددية المعرفة بـ:  $k_0 = 1$  ومن أجل كل  $n$  من  $N$ ،

$$k_{n+1} = \sin k_n$$

• بالاستعانة بالحاسبة، أعط تخميناً حول سلوك المتسالية  $(k_n)$ .

• بين أنه: من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $k_n \in [0; 1]$ .

• ادرس إشارة الدالة  $x \mapsto x - \sin x$  على المجال  $[0; 1]$  واستنتج اتجاه تغير المتسالية  $(k_n)$ .

• ماذا يمكننا أن نستنتج فيما يخص المتسالية  $(k_n)$ ؟



## 5- الحساب التكاملي

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ التكامل المحدود

تعريف

$f$  دالة عددية للمتغير الحقيقي  $x$  و  $F$  دالة أصلية لها على

المجال  $I$ . ليكن  $a$  و  $b$  عدداً من  $I$ .

التكامل (من  $a$  إلى  $b$ ) للدالة  $f$  هو العدد الحقيقي  $F(b) - F(a)$ .

ونرمز:  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

★ خواص التكامل المحدود

$f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على المجال  $I$ .  $a$ ،  $b$ ،  $c$  أعداد من  $I$ .

♦ علاقة شال

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

♦ الخطية

$$k \in \mathbb{R} / \int_a^b (kf)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

♦ المتباينات والتكامل المحدود

في حالة  $a \leq b$ : إذا كان من أجل كل  $x$  من المجال  $[a; b]$ ،  $f(x) \geq 0$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

في حالة  $a < b$ : إذا كان من أجل كل  $x$  من المجال  $[a; b]$ ،  $f(x) > 0$  فإن  $\int_a^b f(x) dx > 0$

وعموماً

في حالة  $a \leq b$ : إذا كان من أجل كل  $x$  من المجال  $[a; b]$ ،  $f(x) \geq g(x)$  فإن

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

في حالة  $a < b$ : إذا كان من أجل كل  $x$  من المجال  $[a; b]$ ،  $f(x) > g(x)$  فإن

$$\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$$

♦ القيمة المتوسطة

إذا كان  $a < b$  فإن القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $[a; b]$  هو العدد الحقيقي

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

♦ حصر القيمة المتوسطة

في حالة  $a < b$ : إذا كان من أجل كل  $x$  من المجال  $[a; b]$ ،  $m \leq f(x) \leq M$  فإن

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

★ التكامل بالتجزئة

$f$  و  $g$  دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال  $I$ ، و المشتقتين  $f'$  و  $g'$  مستمرتين

على المجال  $I$ .  $a$  و  $b$  عدداً من  $I$ .

$$\text{لدينا: } \int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx$$

### مبرهنة 1

إذا كانت الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $I$  فإنه من أجل كل

عدد  $a$  من  $I$ ، الدالة  $F$  المعرفة بـ:  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  هي

الدالة الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$  والتي تتعدهم عند  $a$ .

★ حساب المساحات

المستوي منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نضع:  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ ،  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$  و  $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$  مستطيل. مساحة المستطيل  $OIKJ$  تمثل وحدة القياس للمساحات في المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . ونرمز:  $u.a$

♦ التفسير الهندسي للتكامل المحدود

$f$  دالة عددية للمتغير الحقيقي  $x$ .  $a$  و  $b$  عدنان من  $I$  حيث:  $a \leq b$ . التكامل من  $a$  إلى  $b$  للدالة  $|f|$  هو المساحة  $A$  للحيز المستوي المحصور بين المنحني  $(C_f)$  الممثل للدالة  $f$  وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما  $x=a$  و  $x=b$ .

• في حالة  $f \geq 0$  في المجال  $[a; b]$ : لدينا  $A = \int_a^b f(x) dx (u.a)$

• في حالة  $f \leq 0$  في المجال  $[a; b]$ : لدينا  $A = -\int_a^b f(x) dx (u.a)$

♦ مساحة الحيز المحصور بين منحنين

$f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على المجال  $[a; b]$ .  $(C_f)$  و  $(C_g)$  تمثيلاهما البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

المساحة  $A$  للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  والمستقيمين اللذين معادلتهما  $x=a$  و  $x=b$  يعطى بـ:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx (u.a)$$

♦ حساب الحجم

لفضاء منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . نضع:  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ ،  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ ،  $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$  قطع المستقيمة  $[OI]$ ،  $[OJ]$ ،  $[OK]$  هي أضلاع في متوازي المستطيلات الذي حجمه  $u.a$  وحدة القياس للحجوم.

جسم  $S$  محدّد بالمستويين اللذين معادلتهما:  $z=a$  و  $z=b$ . حيث:  $a \leq b$

كل مستو معادلته  $z=x$  حيث:  $x \in [a; b]$  يقطع الجسم  $S$  وفق مقطع مستو مساحته  $s(x)$  (وحدة مساحة). إذا كانت الدالة  $s$  مستمرة على المجال  $[a; b]$  فإن الحجم  $V$  للجسم  $S$  يعطى بالعلاقة:

$$V = \int_a^b s(x) dx \text{ (وحدة الحجم).}$$

نتيجة:  $f$  دالة مستمرة على المجال  $[a; b]$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني.

$\Gamma$  الحيز المستوي المحدّد بالمنحني  $(C_f)$  والمستقيمتين  $x=a$  و  $x=b$ ،  $y=0$ .

حجم الجسم الدوراني المولّد بدوران  $\Gamma$  حول محور الفواصل يعطى بالعلاقة:  $V = \int_a^b \pi f(x) dx$

تمارين محلولة

حساب التكاملات

علما أنها موجودة، أحسب التكاملات التالية:

$$\int_e^1 x \ln x dx, \int_2^3 e^{1-2x} dx, \int_2^0 t(t^2 - 1) dt, \int_{-1}^2 (2x^3 - x + 2) dx$$

$$\int_0^\pi x \sin x dx, \int_{-\pi}^{\pi/2} 2 \cos u \sin^2 u du$$

1

$$\text{الحل: } \int_{-1}^2 (2x^3 - x + 2) dx = \left[ \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 = (8 - 2 + 4) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 2 \right) = 12$$

$$\int_2^0 t(t^2 - 1) dt = \frac{1}{2} \int_2^0 (t^2 - 1)' (t^2 - 1) dt = \frac{1}{4} \left[ (t^2 - 1)^2 \right]_2^0 = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = -2$$

$$\int_2^3 e^{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_2^3 e^{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \left[ e^{1-2x} \right]_2^3 = -\frac{e^7}{2} + \frac{e^{-3}}{2}$$

$$\int_e^1 x \ln x dx \text{ نكامل بالتجزئة. لدى نضع: } f(x) = \ln x \text{ و } g'(x) = x$$

$$\text{ينتج أن: } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ و } g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int_e^1 x \ln x dx = \int_e^1 f'(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_e^1 - \int_e^1 g(x)f''(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_e^1 - \frac{1}{2}\int_e^1 x dx$$

$$= -\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(1 - e^2) = -\frac{1}{4}(1 + e^2)$$

$$\int_{\pi}^{\pi/2} 2 \cos u \sin^2 u du = 2 \int_{\pi}^{\pi/2} (\sin u)' \sin^2 u du = 2 \left[ \frac{1}{3} \sin^3 x \right]_{\pi}^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx \text{ نكامل بالتجزئة. لدى نضع: } f(x) = x \text{ و } g'(x) = \sin x$$

$$\text{ينتج أن: } (f'(x) = 1 \text{ و } g(x) = -\cos x)$$

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} g(x)f'(x)dx$$

$$= [-x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi$$

## حساب التكاملات

علما أنها موجودة، أحسب التكاملات التالية:

$$\int_0^{\pi} e^t \sin t dt, \quad \int_0^1 \ln(t+2) dt, \quad \int_1^2 \ln t dt$$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt, \quad \int_e^1 \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad \int_{\pi}^0 e^t \cos 2t dt$$

$$\text{الحل: } \int_1^2 \ln t dt \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 1 \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = t \end{cases}$$

$$\int_1^2 \ln t dt = [u(t)v(t)]_1^2 - \int_1^2 u'(t)v(t)dt = [t \ln t]_1^2 - [t]_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

$$\int_0^1 \ln(t+2) dt \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = \ln(t+2) \\ v'(t) = 1 \end{cases}$$

$$\text{ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t+2} \\ v(t) = t+2 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \ln(t+2) dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)dt = [(t+2)\ln(t+2)]_0^1 - \int_0^1 dt$$

$$= 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1$$

$$I = \int_0^{\pi} e^t \sin t dt \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = \sin t \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = -\cos t \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\pi} e^t \sin t dt = [u(t)v(t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(t)v(t)dt = [-e^t \cos t]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^t \cos t dt$$

$$= e^{\pi} + 1 + J$$

$$\text{نحسب من جديد التكامل } J = \int_0^{\pi} e^t \cos t dt \text{ بالتجزئة. نضع } \begin{cases} f(t) = e^t \\ g'(t) = \cos t \end{cases}$$

$$\text{ينتج أن } \begin{cases} f'(t) = e^t \\ g(t) = \sin t \end{cases}$$

$$J = \int_0^{\pi} e^t \cos t dt = [f(t)g(t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(t)g(t)dt$$

$$= [e^t \sin t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^t \sin t dt = -I$$

$$I = \frac{1}{2}(e^{\pi} + 1) \text{ وبالتالي: } I = e^{\pi} + 1 - I$$

$$K = \int_{\pi}^0 e^t \cos 2t dt \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = \cos 2t \end{cases}$$

$$\text{ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = \frac{1}{2} \sin 2t \end{cases}$$

$$K = \int_{\pi}^0 e^t \cos 2t dt = [u(t)v(t)]_{\pi}^0 - \int_{\pi}^0 u'(t)v(t)dt$$

$$= \left[ \frac{1}{2} e^t \sin 2t \right]_{\pi}^0 - \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 e^t \sin 2t dt = -\frac{1}{2} L$$

$$\text{نحسب من جديد التكامل } L = \int_{\pi}^0 e^t \sin 2t dt \text{ بالتجزئة. نضع } \begin{cases} f(t) = e^t \\ g'(t) = \sin 2t \end{cases}$$

وبما أن:  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x}{x^2 + 1} \right) = 0$  فإن المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب مائل ( $\Delta$ )

معادلته  $y = -x$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

الحيز هو مجموعة النقاط  $M(x; y)$  حيث:

$$(-x \leq y \leq \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1}, 0 \leq x \leq 2) \text{ أو } (\frac{-x^3 + x}{x^2 + 1} \leq y \leq -x, -2 \leq x \leq 0)$$

مساحته هي (u.a)  $\int_0^2 [y - (-x)] dx + \int_{-2}^0 [-x - y] dx$

$$\int_{-2}^0 \frac{-2x}{x^2 + 1} dx + \int_0^2 \frac{2x}{x^2 + 1} dx \quad (u.a) = [\ln(x^2 + 1)]_{-2}^0 - [\ln(x^2 + 1)]_0^2$$

وهي:

$$= 2 \ln 5 \quad (u.a)$$

### حساب مساحة الحيز المحصور بين منحنين

4  $f$  و  $g$  الدالتان المعرفتان على  $R$  بـ:  $f(x) = \cos x$  و  $g(x) = \sin x$   
احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  الممثلين  
للدالتين  $f$  و  $g$  والمستقيمين اللذين معادلتهما  $x = 0$  و  $x = \pi$ .

الحل: مساحة الحيز تعطى بالتكامل الحدود:  $\int_0^\pi |\cos x - \sin x| dx \quad (u.a)$

و علما أنه: من اجل كل  $x$  من  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  فإن  $\cos x - \sin x \geq 0$

و من اجل كل  $x$  من  $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$  فإن  $\cos x - \sin x \leq 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |\cos x - \sin x| dx (u.a) &= \left( \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^\pi (\sin x - \cos x) dx \right) (u.a) \\ &= \left( [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^\pi \right) (u.a) \\ &= 2\sqrt{2} (u.a) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f'(t) = e^t \\ g(t) = -\frac{1}{2} \cos 2t \end{cases} \text{ ينتج أن}$$

$$L = \int_\pi^0 e^t \sin 2t dt = [f(t)g(t)]_\pi^0 - \int_\pi^0 f'(t)g(t) dt = \left[ -\frac{1}{2} e^t \cos 2t \right]_\pi^0 + \frac{1}{2} \int_\pi^0 e^t \cos 2t dt$$

إذا:

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^\pi + \frac{1}{2} K$$

$$K = \frac{1}{5} (-e^\pi + 1) \text{ وبالتالي: } K = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (e^\pi - 1) + \frac{1}{2} K \right]$$

$$\int_e^1 \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = \ln x \\ v'(t) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{x} \\ v(t) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int_e^1 \frac{\ln x}{x^2} dx = [u(t)v(t)]_e^1 - \int_e^1 u'(t)v(t) dt = \left[ -\frac{\ln x}{x} \right]_e^1 + \int_e^1 \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{e} - 1$$

إذا:

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt \text{ نكامل بالتجزئة. نضع: } \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = 2\sqrt{t+1} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t) dt = [2t\sqrt{t+1}]_0^1 - 2 \int_0^1 \sqrt{t+1} dt$$

إذا:

$$= 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} \left( 2^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{-2\sqrt{2} + 4}{3}$$

### حساب المساحات

3 نعتبر المنحني (C) الذي معادلته  $y = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1}$  في المعلم المتعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

• بين أن (C) يقبل مستقيم مقارب ( $\Delta$ ) عند  $+\infty$  و  $-\infty$ .

• احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيم ( $\Delta$ ) والمستقيمين اللذين معادلتهما  $x = 2$  و  $x = -2$ .

الحل: لدينا من اجل كل  $x$  من  $R$ ,  $y = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{-x(x^2 + 1) + 2x}{x^2 + 1} = -x + \frac{2x}{x^2 + 1}$

## حساب الحجم

نعتبر الدالة  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على المجال  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  بالدستور

$$f(x) = \cos x$$

نعتبر مساحة اختيار  $\Omega$  المستوي المحصور بين المنحني الممثل للدالة  $f$  ومحور الفواصل في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس.

أحسب حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران اختيار  $\Omega$  حول محور الفواصل.

5

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi f^2(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 2x + 1) dx$$

الحل: لدينا

$$= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{2} \sin 2x + x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{2} (u.v)$$

## تمارين للتدريب

1. احسب التكاملات المحدودة التالية بعد التأكد من وجودها.

$$\int_1^{10} (u-2+3e^{2u}) du, \int_0^{\pi/4} \frac{2 dt}{\cos^2 t}, \int_{-\pi}^0 -\sin 3x dx$$

$$\int_1^0 \frac{1-2x}{\sqrt{x^2-x+3}} dx, \int_{-1}^1 \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx, \int_{\pi/4}^{\pi/6} \tan^2 x dx, \int_0^1 \sqrt{3x+1} dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \tan^5 t (1 + \tan^2 t) dt, \int_e^2 \frac{dt}{t \ln t}, \int_0^1 x e^{x^2} dx, \int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx$$

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكاملات المحدودة التالية:

$$\int_1^e x^2 \ln x dx, \int_2^0 (x-2)e^{1+2x} dx, \int_1^2 x e^{5x} dx, \int_1^e t \ln t dt$$

$$\int_{-\pi}^{3\pi/2} x^2 \cos 2x dx, \int_1^0 \frac{u}{\sqrt{2+u}} du, \int_2^1 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) dx, \int_1^2 (\ln t)^2 dt$$

$$\int_1^e t(\ln t)^2 dt, \int_{-1}^1 (2x+3)^2 e^{-x} dx, \int_0^{\pi} e^t \sin t dt, \int_1^2 \sin(\ln t) dt$$

$$3. f \text{ الدالة المعرفة على } R^* \text{ بالدستور: } f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x^2}$$

اكتب الدالة  $f$  على شكل مجموع دوال بسيطة، ثم احسب  $\int_2^1 f(x) dx$ .

$$g \text{ الدالة المعرفة على } R - \{-2; 2\} \text{ بالدستور: } g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

عين ثلاثة أعداد حقيقية  $a, b, c$  بحيث من اجل كل  $x$  من  $R - \{-2; 2\}$

$$g(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2} \quad \text{احسب إذا: } \int_1^1 g(x) dx$$

$$h \text{ الدالة المعرفة على } R - \{2\} \text{ بالدستور: } h(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)^2}$$

عين ثلاثة أعداد حقيقية  $a, b, c$  بحيث من اجل كل  $x$  من  $R - \{2\}$

$$h(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \quad \text{احسب إذا: } \int_1^0 h(x) dx$$

$$4. f \text{ الدالة المعرفة على } R^* \text{ بالدستور: } f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

$$\text{عين عددين حقيقيين } a, b \text{ بحيث من اجل كل } x \text{ من } R^*, f(x) = a + \frac{be^x}{e^x - 1}$$

$$\text{ثم احسب } \int_2^1 f(x) dx$$

5. احسب القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $I$  في كل حالة:

$$f(x) = 2x^2 + 5x - 1 \text{ و } I = [-1; 3], \quad f(x) = \ln(x-1) \text{ و } I = [2; 4],$$

$$f(x) = e^{3x} \text{ و } I = [0; 3], \quad f(x) = \sin^2 x \text{ و } I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f(x) = \cos^4 x \text{ و } I = \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right], \quad f(x) = x^2 e^{x^3} \text{ و } I = [-1; 0]$$



$$6. (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } N \text{ بالعلاقة } u_n = 2 \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{t^2 + 1} dt$$

• بين أنه من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $u_n \geq 0$ .

• بين أنه من أجل كل  $n$  من  $N$ ،  $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$ .

• احسب الحدود  $u_0, u_1, u_2$ .

• بين أن  $(u_n)$  متقاربة على  $N$ ، واستنتج أنها متقاربة، ثم تعرف على نهايتها.

$$7. f \text{ الدالة المعرفة على } [-1, 1] \text{ بالدستور: } f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

• ارسم التمثيل البياني للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

•  $g$  الدالة المعرفة على  $[0, \pi]$  بالدستور:  $g(x) = F(\cos x)$  حيث  $F$  دالة أصلية

للدالة  $f$  على  $[-1, 1]$ .

بين أنه من أجل كل  $x$  من  $[0, \pi]$ ،  $g'(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - 1)$ ، ثم استنتج دالة أصلية

للدالة  $g'$  على  $[0, \pi]$ .

• احسب بدلالة  $F$  العدد:  $g(0) - g(\pi)$ ، ثم احسب  $\int_1^2 f(t) dt$ .

ماذا تمثل النتيجة المحصل عليها؟

$$8. f \text{ الدالة المعرفة على } R \text{ بالدستور: } f(x) = -x + \frac{3}{2} + \frac{-x}{x^2 + 1}$$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (الوحدة  $2cm$ )

• ادرس تغيرات الدالة  $f$ ، وبين أن المستقيم  $(D)$  ذي المعادلة  $y = -x + \frac{3}{2}$  هو مستقيم

مقارب للمنحني  $(C_f)$ .

• ارسم  $(D)$  و  $(C_f)$ .

• احسب بالمستقيم المربع مساحة الخيز للمستوي المحدد بالمنحني  $(C_f)$  والمستقيم  $(D)$  وبالمستقيمين ذوي

المعادلتين  $x = -1$  و  $x = 2$ .

$$9. \varphi \text{ الدالة المعرفة على } R \text{ بالدستور: } \varphi(x) = (x-1)e^{x+1}$$

$(C_\varphi)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . (الوحدة  $1cm$ )

• ادرس تغيرات الدالة  $\varphi$  و ارسم تمثيلها البياني  $(C_\varphi)$ .

احسب مساحة الخيز المستوي المحدد بالمنحني  $(C_\varphi)$  والمستقيمات التي معادلاتها:  $y=0$  و  $x=-1$  و  $x=\frac{3}{2}$ .

احسب مساحة الخيز المستوي المحدد بالمنحني  $(C_\varphi)$  والمستقيمات التي معادلاتها:  $y=0$  و  $x=1$  و  $x=-1$ .

استنتج مساحة الخيز المستوي المحدد بالمنحني  $(C_\varphi)$  وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتها:

$$x = -1 \text{ و } x = \frac{3}{2}$$

$$10. f \text{ الدالة المعرفة على } R \text{ بـ: } f(0)=1 \text{ و من أجل } x \neq 0,$$

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

• بين أن الدالة  $f$  مستمرة على  $R$ ، ثم احسب العدد  $f'(x)$  من أجل كل  $x$  من  $R^*$ .

•  $g$  الدالة المعرفة على  $R$  بـ:  $g(x) = e^x - xe^x - 1$

• ادرس تغيرات الدالة  $g$ ، وتعرف على إشارة العدد  $g(x)$  على  $R$  ثم استنتج إشارة  $f'(x)$ .

أعط اتجاه تغير الدالة  $f$ .

• علل وجود العدد  $h(x)$  من أجل كل  $x$  من  $R$  حيث:  $h(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$

• عبّر عن الدالة  $h$  باستعمال الدالة  $F$  حيث  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $R$ .

• استنتج أن الدالة  $h$  تقبل الاشتقاق على  $R$  وبين أنه من أجل كل  $x$  من  $R$ ،

$$h'(x) = \frac{x}{e^{2x} - 1} (3 - e^x)$$

• تعرف على اتجاه تغير الدالة  $h$ .

• باستعمال خاصية الحصر للقيمة المتوسطة لدالة، بين أنه من أجل كل  $x$  من  $R^*$ ، العدد  $h(x)$  يقع

بين  $f(x)$  و  $f(2x)$ .

ميز بين الحالتين  $x < 0$  و  $x > 0$ . احسب إذا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x}$ .

ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ .

## 6- الاحتمالات

### Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ العدة

◆ عاملي عدد طبيعي

تعريف

$n$  عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 1.

عاملي  $n$ ، هو العدد الطبيعي الذي نرمز له:  $n!$  والذي يساوي جداء الأعداد الطبيعية من 1 إلى  $n$ .

نكتب:  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ . نقبل أن:  $0! = 1$ .

◆ عدة السلاسل

تجربة عشوائية تكمن في سحب  $p$  عنصر على التوالي من وعاء  $U$  يحوي  $n$  عنصر.

الوعاء  $U$  يعتبر مجموعة ذات  $n$  عنصر، ومخرج هذه التجربة تشكّل سلاسل ذات  $p$  عنصر من  $U$ .

• السحب بالإرجاع

عدد السلاسل ذات  $p$  عنصر من  $U$ ، هو:  $n^p = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{p \text{ عامل}}$  (هذه السلاسل تدعى قوائم).

• السحب بدون إرجاع

عدد السلاسل ذات  $p$  عنصر مختلفة من  $U$ ، هو:  $\underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)}_{p \text{ عامل}}$

(هذه السلاسل تدعى ترتيبات)

◆ توفيقات

تعريف

$E$  مجموعة ذات  $n$  عنصر،  $p$  عدد طبيعي حيث:  $0 \leq p \leq n$

توفيق ذات  $p$  عنصر من  $E$ ، هي مجموعة جزئية من  $E$  تضم  $p$  عنصر.

(تكرار العناصر غير ممكن وترتيبها غير مهم)

عدد التوفيق ذات  $p$  عنصر من المجموعة  $E$  ذات  $n$  عنصر يرمز له  $\binom{n}{p}$

أو  $C_n^p$  ويعطى بالعلاقة:  $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

للتحفظ

$n$  و  $p$  عددين طبيعيين حيث:  $0 \leq p \leq n$

•  $C_n^p = C_n^{n-p}$  ,  $C_n^1 = n$  ,  $C_n^n = 1$  ,  $C_n^0 = 1$

• من أجل  $1 < p \leq n$ ،

$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$  (قاعدة تشكّل مثلث باسكال)

• من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  و من أجل كل  $n$  من  $N^*$ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

دستور ثنائي  
الحد للنيوتن

★ الفضاء الاحتمالي المنته

◆ مجموعة الإمكانات-الحوادث

تعريف

نتائج التجربة العشوائية تشكّل مجموعة منتهية تدعى مجموعة

الإمكانات (مجموعة المخارج) يرمز لها  $\Omega$ .

كل جزء  $A$  من المجموعة  $\Omega$  يدعى حادثة.

مجموعة أجزاء  $\Omega$  هي مجموعة جميع الحوادث المرتبطة بالتجربة

العشوائية ويرمز لها  $P(\Omega)$ .

## ◆ مصطلحات على الحوادث

للحفظ

| المصطلح الرياضي              | المصطلح الاحتمالي                      |
|------------------------------|--|
| $A = \phi$                   | الحادثة المستحيلة                      |
| $A = \Omega$                 | الحادثة الأكيدة                        |
| $A = \{e_i\}$                | الحادثة الأولية                        |
| $\bar{A}$ متممة المجموعة $A$ | $\bar{A}$ الحادثة المعاكسة للحادثة $A$ |
| $A \cap B = \phi$            | $A$ و $B$ حادثان غير متلامتين          |

## ◆ قانون الاحتمال - الاحتمال

تعريف

$\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$  مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية معينة ذات  $n$  مخرج.

قانون الاحتمال لتجربة عشوائية هو الدالة التي ترفق بكل حادثة أولية  $\{e_i\}$  من

$$P(\Omega) \text{ عدد } p_i \text{ من المجال } [0;1]. \text{ حيث: } \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

$p_i$  يدعى احتمال تحقق الحادثة الأولية  $\{e_i\}$ . ونرمز له بـ:  $p_i = p(\{e_i\})$ .

الاحتمال المرفق بهذا القانون هو الدالة  $p$  المعرفة على  $P(\Omega)$  بما يلي:

$$p(\phi) = 0$$

وفي حالة  $A \neq \phi$ ،  $p(A)$  هو مجموع الأعداد  $p_i$  من أجل كل مخرج  $e_i$  من  $A$ .

$$\text{أي: } p(A) = \sum_{e_i \in A} p_i. \text{ يدعى احتمال تحقق الحادثة } A.$$

تعليقات

الاحتمال  $p$  هو دالة مجموعة تعريفها  $P(\Omega)$  وتأخذ قيمها في المجال  $[0;1]$ .

مجموعة الإمكانيات  $\Omega$  مرفقة بالاحتمال  $p$  يرمز لها بـ:  $(\Omega; p)$  وتدعى

فضاء احتمالي منته.

إذا كانت الحوادث الأولية لها نفس الاحتمال  $p_0$  فإننا نقول أن الحوادث متساوية

$$\text{الاحتمال. ولدينا } p_0 = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)} \quad / \quad \text{Card}(\Omega) \text{ يرمز إلى عدد عناصر } \Omega.$$

## ◆ خواص الاحتمال

$(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته.

$$p(\Omega) = 1$$

إذا كانتا  $A$  و  $B$  حادثتين من الفضاء فإن:  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ .

إذا كانت  $A$  حادثة من الفضاء فإن:  $p(A) = 1 - p(\bar{A})$ .

## ◆ المتغير العشوائي - قانون الاحتمال

تعريف

$(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته.

المتغير العشوائي  $X$  هو كل دالة معرفة على مجموعة الإمكانيات  $\Omega$  وتأخذ قيمها في  $R$ .

$$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\} \text{ تدعى مجموعة قيم المتغير العشوائي } X.$$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$ ، هو الدالة التي ترفق بكل قيمة  $x_i$  من  $X(\Omega)$

عدد  $p_i$  من المجال  $[0;1]$ . حيث:

$$p_i = p(X = x_i) = \frac{\text{Card}(X = x_i)}{\text{Card}(\Omega)} \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

## ◆ الأمل الرياضي - التباين - الانحراف المعياري

تعريف

$(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته. المتغير العشوائي المعروف على  $\Omega$

$$\text{و } X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\} \text{ مجموعة قيمه.}$$

$$\bullet \text{ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي } X \text{ هو } E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i \text{ حيث } p_i = p(X = x_i)$$

(يدعى كذلك المتوسط الحسابي ويرمز له  $\bar{X}$ )

$$\bullet \text{ التباين للمتغير العشوائي } X \text{ هو } V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - \bar{X})^2 \text{ حيث } p_i = p(X = x_i)$$

$$\text{ويعطى كذلك بـ: } V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\bullet \text{ الانحراف المعياري للمتغير العشوائي } X \text{ هو } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

## ★ الاحتمال الشرطي

**تعريف**  $(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته.  $A$  و  $B$  حادثتان من  $\Omega$  حيث:  
 $p(A) \neq 0$

"احتمال تحقق  $B$  علما أن  $A$  تحقق" هو الاحتمال  $p_A$  المعروف بما يلي:  
 $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$  .  $p_A$  يدعى الاحتمال الشرطي علما  $A$ .

## ◆ الحوادث المستقلة

**تعريف**  $(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته.  $A$  و  $B$  حادثتان من  $\Omega$ .

الحادثتان  $A$  و  $B$  مستقلتان عشوائيا إذا فقط إذا كان

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

## ◆ دستور الاحتمالات الكلية

## مبرهنة 1

$(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته،  $A_1, A_2, \dots, A_n$  حوادث من هذا الفضاء تشكّل تجزئة له.

من أجل كل حادثة  $B$  من الفضاء  $(\Omega; p)$ ، لدينا:

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$$

$$\text{أي: } p(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i) \times p_{A_i}(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i \cap B)$$

## ◆ المتغيرات العشوائية المستقلة

$(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته،  $X$  و  $Y$  المتغيران العشوائيان المعروفان على  $\Omega$ .

$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  و  $Y(\Omega) = \{y_1; y_2; \dots; y_m\}$  مجموعتا قيمهما.

$X$  و  $Y$  مستقلان معناه من أجل كل  $1 \leq i \leq n$  و من أجل كل  $1 \leq j \leq m$ ،  
 الحادثتان  $(X = x_i)$  و  $(Y = y_j)$  مستقلتان.

## للحفظ

$X$  و  $Y$  متغيران عشوائيان مستقلان

$$E(XY) = E(X) \times E(Y) \quad \text{و} \quad E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

## ◆ التجارب العشوائية المستقلة

$(\Omega_1; p_1), (\Omega_2; p_2), \dots, (\Omega_n; p_n)$  فضاء احتمالي منته لـ  $n$  تجربة عشوائية معينة.

$n$  تجربة عشوائية تكون مستقلة إذا فقط إذا كان احتمال سلسلة الحوادث

$(A_1, A_2, \dots, A_n)$  حيث  $A_i$  حادثة من  $\Omega_i$  هو:  $p_1(A_1) \times p_2(A_2) \times \dots \times p_n(A_n)$ .

## ★ قوانين الاحتمالات

## ◆ قانون برنولي (Bernoulli) - قانون ثنائي الحد (binomiale)

## تعريف

نعتبر تجربة عشوائية ذات مخرجين  $A$  و  $\bar{A}$ ، [يدعيان النجاح والإخفاق].

ونضع: احتمال تحقق  $A$  هو  $\alpha$  واحتمال تحقق  $\bar{A}$  هو  $(1-\alpha)$  حيث:  $\alpha \in ]0; 1[$ .

قانون برنولي  $B_\alpha$  هو قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  والذي

يرفق بالمخرج  $A$  القيمة 1 ويرفق بالمخرج  $\bar{A}$  القيمة 0.

التجربة العشوائية ذات مخرجين تدعى تجربة برنولي

## ◆ خواص

• من أجل قانون برنولي  $B_\alpha$  للمتغير العشوائي  $X$  المعروف سابقا:

أمله الرياضي هو:  $E(X) = \alpha$  و تباينه هو:  $V(X) = \alpha(1-\alpha)$ .

• من أجل  $\alpha \in ]0; 1[$ . نكرّر تجربة برنولي العشوائية  $n$  مرة

— نفرض أن التجارب العشوائية مستقلة—

ونعتبر المتغير العشوائي  $Y$  الذي يأخذ كقيم، عدد المرات التي يتحقق فيها المخرج  $\alpha$ .

تعريفًا: قانون الاحتمال للتغير العشوائي  $Y$  يدعى قانون ثنائي الحد وسيطاه  $n$  و  $\alpha$ ، ويرمز له:  $B(n; \alpha)$ . معرف بما يلي:

من أجل كل عدد طبيعي  $k$  حيث:  $0 \leq k \leq n$  لدينا،  $p(Y=k) = C_n^k \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$  و لدينا كذلك:  $E(Y) = n\alpha$  و  $V(Y) = n\alpha(1-\alpha)$

### ★ قوانين الاحتمال المستمرة

نعتبر فيما يلي  $(I; p)$  فضاء احتمالي غير منته، حيث  $I$  مجال غير منته من  $\mathbb{R}$ .

### ◆ قانون التوزيعات المنتظمة على المجال $[0;1]$

#### تعريف

قانون التوزيعات المنتظمة على المجال  $[0;1]$  يهدف إلى الاختيار العشوائي لعدد من المجال  $[0;1]$ .

$a$  و  $b$  عددين من المجال  $[0;1]$  حيث:  $a \leq b$ .

إذا كان  $J$  أحد المجالات الأربعة المحددة بالعددين  $a$  و  $b$  (أي  $J = [a; b]$  أو  $J = [a; b[$  أو  $J = ]a; b]$  أو  $J = ]a; b[$  ...)

فإن الاحتمال  $P$  المعروف بقانون التوزيعات المنتظمة على  $[0;1]$  يحقق:  $P(J) = b - a$ .

خواص

الاحتمال  $P$  المعروف بقانون التوزيعات المنتظمة على  $[0;1]$  يحقق كذلك:

$P(\emptyset) = 0$  و  $P([0;1]) = 1$  و  $P(\{x\}) = 0$  من المجال  $[0;1]$ .

إذا كان  $J_1$  و  $J_2$  مجالين منفصلين من  $[0;1]$  فإن  $P(J_1 \cup J_2) = P(J_1) + P(J_2)$ .

إذا كان  $\bar{J}$  متممة المجال  $J$  إلى  $[0;1]$  فإن  $P(\bar{J}) = 1 - P(J)$ .

في قانون التوزيعات المنتظمة على  $[0;1]$ ، احتمال تحقق أي مجال من  $[0;1]$  هو طوله.

### ◆ القانون الأسّي

#### تعريف

$\lambda$  عدد حقيقي موجب تمامًا، و  $f_\lambda$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $I = [0; +\infty[$  بالدستور:  $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .

الاحتمال  $p$  على المجال  $I$  يعرف القانون الأسّي إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

• من أجل كل مجال  $J$  من  $I$  حده  $a$  و  $b$  (حيث  $a$  و  $b$  عنصران من  $I$  و  $a \leq b$ )

لدينا:  $p(J) = \int_a^b f_\lambda(x) dx$ .

• من أجل كل مجال  $J$  حيث:  $J = [a; +\infty[$  ( $a$  عنصر من  $I$ ) لدينا:

$p(J) = 1 - p([0; a])$ .

#### تعليق

احتمال تحقق المجال  $[a; b]$  يفسر هندسيًا، بمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى

الممثل للدالة  $f_\lambda$  وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما  $x=a$  و  $x=b$ .

### ★ قانون احتمال مستمر ذات كثافة

#### تعريف

•  $f$  دالة مستمرة وموجبة تمامًا على المجال  $I = [a; b]$  من  $\mathbb{R}$ ، حيث:  $\int_a^b f(t) dt = 1$ .

نعرف الاحتمال  $p$  على المجال  $I$  كما يلي:

من أجل كل مجال  $J$  من  $I$  حده  $c$  و  $d$  حيث  $c \leq d$ ،  $p(J) = \int_c^d f(t) dt$ .

•  $f$  دالة مستمرة وموجبة تمامًا على المجال  $I = [a; +\infty[$  من  $\mathbb{R}$ ، حيث:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = 1$$

نعرف الاحتمال  $p$  على المجال  $I$  كما يلي:

من أجل كل مجال  $J$  من  $I$  حده  $c$  و  $d$  حيث  $c \leq d$ ،  $p(J) = \int_c^d f(t) dt$ .

ومن أجل كل مجال  $K$  من  $I$  حيث:  $K = [c; +\infty[$  أو  $K = ]c; +\infty[$

مع  $c \geq a$ ،  $p(K) = 1 - \int_a^c f(t) dt$ .

في الحالتين  $p$  يعرف قانون الاحتمال على المجال  $I$ ، والدالة  $f$  تدعى الكثافة.

## للحفظ

قانون التوزيعات المنتظمة على  $[0;1]$ ، هو قانون احتمال مستمر ذو كثافة وهي الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0;1]$  بالدستور:  $f(x) = 1$ .  
القانون الأسّي الذي وسيطه  $\lambda$ ، المعروف على  $R_+$  هو قانون احتمال مستمر ذو كثافة وهي الدالة  $f$  المعرفة على  $R_+$  بالدستور:  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ .

## تمارين محلولة

## الاحتمال الشرطي

نلقي زهرة نرد رباعية الوجوه، مرتين على التوالي تحمل أوجهها الأربعة الأرقام من 1 إلى 4.

- 1 نتم مجموع الرقمين اللذين يظهران بعد الرميّتين. احسب احتمال:
- المجموع يساوي 6 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 3.
  - المجموع يساوي على الأقل 7 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 2.

الحل:  $(\Omega; p)$  فضاء احتمالي منته، حيث  $Card(\Omega) = 4^2 = 16$ ،  $A$  و  $B$  حادثتين من  $\Omega$  حيث:  $p(A) \neq 0$

$A$ : "المجموع يساوي 6" لدينا:  $A = \{(2;4); (4;2); (3;3)\}$

$B$ : "الرمية الأولى تعطي 3" لدينا:  $B = \{(3;1); (3;2); (3;3); (3;4)\} \neq \emptyset$

و  $A \cap B = \{(3;3)\}$

إذا: الاحتمال أن يكون المجموع يساوي 6 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 3

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{16}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$A'$  "المجموع أكبر من أو يساوي 7" لدينا:  $A' = \{(3;4); (4;3); (4;4)\}$

$B'$  "الرمية الأولى تعطي 2" لدينا:  $B' = \{(2;1); (2;2); (2;3); (2;4)\} \neq \emptyset$

$$A' \cap B' = \emptyset$$

إذا: الاحتمال أن يكون المجموع يساوي على الأقل 7 علما أن الرمية الأولى أعطت الرقم 2

$$p_{B'}(A') = \frac{p(A' \cap B')}{p(B')} = 0$$

## توضيف شجرة الاحتمالات واستعمال دستور الاحتمالات الكلية

في دراسة إحصائية تجمع سكاني معيّن، أفادت أن 10% من الأشخاص يحملون فيروسا ما.

إجراءات فحص استعجالية أُخذت في هذا التجمع السكاني لتعرف على هؤلاء الأشخاص. فلو حظ أنه من بين الأشخاص الحاملين لهذا الفيروس 95% كان فحصهم ايجابي (فعلا حاملون للفيروس) ومن بين الأشخاص غير الحاملين لهذا الفيروس 4% فحصهم كان ايجابي.

نختار عشوائيا شخصا من هذا التجمع ونجرى له الفحص.

$A$  الحادثة "الشخص حامل للفيروس"

و  $B$  الحادثة "الفحص ايجابي".

• احسب احتمال الحوادث:  $A \cap B$ ,  $\bar{A} \cap B$ ,  $B$ .

• احسب الاحتمالين:  $p_B(A)$ ,  $p_B(\bar{A})$ .

الحل: لحساب احتمال حادثتين  $A \cap B$ ,  $\bar{A} \cap B$  نستعين بشجرة الاحتمالات التالية:

(ترسم في نهاية الحل) لحساب احتمال الحادثة  $B$  نستعمل دستور الاحتمالات الكلية وذلك باعتبار أن  $A$  و  $\bar{A}$  هما الحادثتين في مجموعة الإمكانات.

$$p(B) = p(A) \times p_{|A}(B) + p(\bar{A}) \times p_{|\bar{A}}(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{131}{1000}$$

$p_B(A)$  هو احتمال تحقق الحادثة  $A$  علما أن الحادثة  $B$  تحققت وحسب شجرة الاحتمالات



**الحل:** نختار مجموعة الإمكانات الموافقة لقانون برنولي مثلاً  $\Omega = \{B; N\}$  حيث:  $B$  هو

الأبيض و  $N$  هو الأسود

ولدينا:  $p(\{B\}) = \frac{2}{5}$  و  $p(\{N\}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

نعرف بالسحبة المكررة أربع مرات مع الإرجاع، قانون ثنائي الحد وسيطاه 4 و  $\frac{3}{5}$ .

إذا احتمال سحب بالضبط ثلاث كرات هو:

$$p(X=3) = C_4^3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^1 = 4 \times \frac{54}{625} = 0.3456$$

معدل الكرات السوداء المسحوبة هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي لقانون ثنائي الحد

وسيطاه 100 و  $\frac{3}{5}$  وهو  $E(X) = 100 \times \frac{3}{5} = 60$ .

### كثافة الاحتمال

في كل حالة أذكر إن كانت الدالة هي كثافة احتمال.

• الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[0;1]$  بالدستور  $f(x) = x^2$ .

• الدالة  $g$  معرفة على المجال  $[0;1]$  بالدستور  $g(x) = 4x^3$ .

• الدالة  $h$  معرفة على المجال  $[1;2]$  بالدستور  $h(x) = 4x^3$ .

• الدالة  $k$  معرفة على المجال  $[-1;0]$  بالدستور  $k(x) = 4x^3$ .

• الدالة  $l$  معرفة على المجال  $[2;+\infty[$  بالدستور  $l(x) = \frac{2}{x^2}$ .

4

**الحل:** لدينا  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \neq 1$  إذا الدالة  $f$  لا تمثل كثافة احتمال.

لدينا  $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 4x^3 dx = \left[x^4\right]_0^1 = 1$  وبما أن الدالة  $g$  مستمرة وموجبة على  $[0;1]$  فإنها تمثل كثافة احتمال على  $[0;1]$ .

لدينا  $\int_1^2 h(x)dx = \int_1^2 4x^3 dx = \left[x^4\right]_1^2 = 15 \neq 1$  إذا الدالة  $h$  لا تمثل كثافة احتمال.

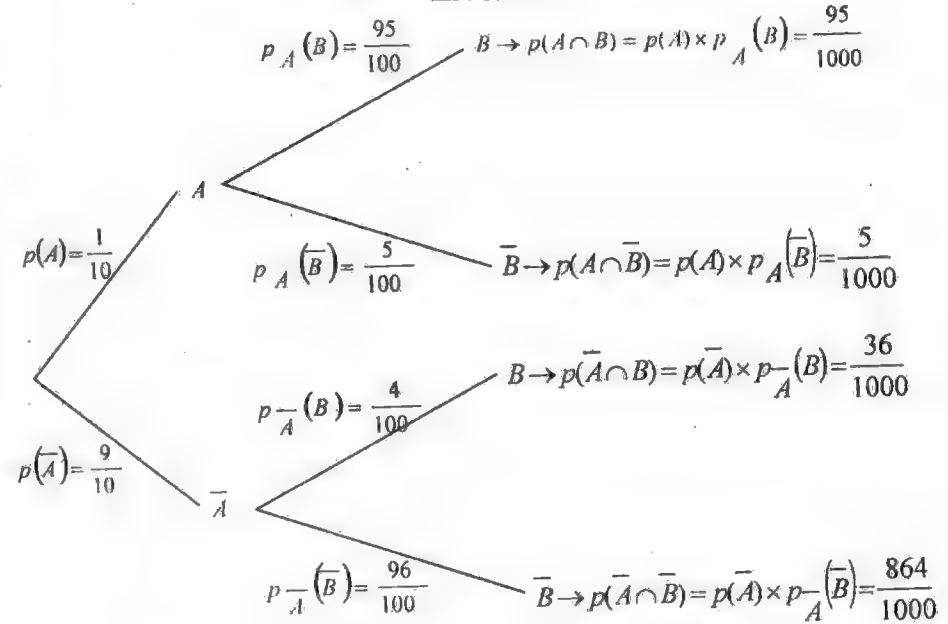
الدالة  $k$  لا تمثل كثافة احتمال على المجال  $[-1;0]$ ، كونها غير موجبة على  $[-1;0]$ .

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{95}{131}$$

$p_B(\bar{A})$  هو احتمال تحقق الحادثة  $\bar{A}$  علماً أن الحادثة  $B$  تحققت وحسب شجرة الاحتمالات

$$p_B(\bar{A}) = \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{36}{131}$$

### الشجرة (العنكبوتية)



### قانون برنولي

يحوي صندوق خمس كرات لا تميز بينها عند اللمس (2 بيضاء و 3 سوداء)

• نسحب من هذا الصندوق كرة واحدة، كيف يمكننا اختيار مجموعة

الإمكانات التي توافق قانون برنولي في هذه الحالة؟

• نجري أربع سحبات لكرة من الصندوق مع الإرجاع - السحبات الأربع مستقلة -

ما احتمال سحب بالضبط ثلاث كرات سوداء؟.

• نعيد عملية سحب كرة من الصندوق 100 مرة مع الإرجاع، ما هو

معدل الكرات السوداء المسحوبة؟

3

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_2^x \left(\frac{2}{t^2}\right) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{t}\right]_2^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1$

وعما أن الدالة / مستمرة وموجبة على  $[2; +\infty[$  فإنها تمثل كثافة احتمال على  $[2; +\infty[$ .

### قانون الاحتمال للمتغير العشوائي المستمر

|   |  |
|---|--|
| 5 | المتغير العشوائي المستمر، والدالة $f'$ كثافة الاحتمال المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بالدستور: $f(x) = e^{-x}$<br>علّل كون $f'$ كثافة احتمال واحسب احتمال الحادثة $1 \leq X \leq 2$ . |
|---|--|

**الحل:** الدالة  $f: x \rightarrow e^{-x}$  معرفة وقابلة للاشتقاق على كامل  $f$  وبالأخص على  $[0; +\infty[$  فهي إذاً مستمرة على  $[0; +\infty[$ . ومن أجل كل  $x$  من  $R$ ،  $e^{-x} > 0$  أي الدالة  $f$  موجبة على  $[0; +\infty[$ .

ولدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^x = 1$

مما سبق فإن الدالة  $f'$  كثافة احتمال على المجال  $[0; +\infty[$ .

$$p([1; 2]) = p(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_1^2 = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.23$$

### القانون الأسّي

|   |   |
|---|---|
| 6 | جهاز كهربائي يشتغل بطاريتين $P_1$ و $P_2$ . المتغير العشوائي الذي يرقى بكل بطارية من النوع $P_1$ المدة الزمنية لصلاحيتها بالساعة، و $X_2$ المتغير العشوائي الذي يرقى بكل بطارية من النوع $P_2$ المدة الزمنية لصلاحيتها بالساعة. نفرض أن المتغيران العشوائيان $X_1$ و $X_2$ مستقلان ويتبعان نفس القانون الأسّي الذي كثافته الدالة $f'$ المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بالدستور: $f(x) = 0.001e^{-0.001x}$<br>نفرض أن الجهاز يتوقف عن التشغيل بمجرد نفاد إحدى البطاريتين.<br>• احسب احتمال توقف الجهاز عن التشغيل في حدود 500 ساعة.<br>• احسب احتمال كون الجهاز في حدود 1000 ساعة لا يزال يشتغل. |
|---|---|

**الحل:** احتمال توقف الجهاز عن التشغيل في حدود 500 ساعة، يعني

احتمال أن تكون المدة الزمنية لصلاحية إحدى البطاريتين على الأقل  $P_1$  أو  $P_2$  أصغر من أو تساوي 500 ساعة. هو:

$$\begin{aligned} p((X_1 \leq 500) \cup (X_2 \leq 500)) &= p(X_1 \leq 500) + p(X_2 \leq 500) - p((X_1 \leq 500) \cap (X_2 \leq 500)) \\ &= p(X_1 \leq 500) + p(X_2 \leq 500) - p(X_1 \leq 500) \times p(X_2 \leq 500) \\ &= 2 \int_0^{500} 0.001 e^{-0.001x} dx - \left( \int_0^{500} 0.001 e^{-0.001x} dx \right)^2 \approx 0.63 \end{aligned}$$

احتمال كون الجهاز في حدود 1000 ساعة لا يزال يشتغل، يعني

احتمال أن تكون المدة الزمنية لصلاحية كلا البطاريتين  $P_1$  و  $P_2$  أكبر من أو تساوي 1000 ساعة. هو:

$$\begin{aligned} p((X_1 \geq 1000) \cap (X_2 \geq 1000)) &= p(X_1 \geq 1000) \times p(X_2 \geq 1000) \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{1000}^x 0.001 e^{-0.001t} dt \right)^2 = e^{-2} \end{aligned}$$

### تمارين للتدريب

1. بسّط العبارات التالية:  $\frac{n!}{(n+1)!}$ ،  $6! \left( \frac{9}{8!} - \frac{1}{7!} \right)$ ،  $\frac{6!5!}{3!4!}$ ،  $\frac{12!}{15!}$

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} \cdot \frac{n(n+1)!}{(2n)!}$$

باستعمال الرمز ! أعط كتابة أخرى لكل من الأعداد التالية:

$$n(n+1)(n+2)، \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2}، 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$$

$$\text{أنشر ثنائيات الحد التالية: } (2x-1)^6، (2a-3b)^4، (a+1)^5$$

باستعمال نشر ثنائي الحد  $(a-1)^n$  برهن أنه من أجل كل عند طبيعي زوجي

$$\text{لدينا: } C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{n-1}$$

دون النشر، أعط معامل  $x^4$  في نشر ثنائي الحد  $(2x-1)^6$ .

أنشئ الأسطر الخمسة الأولى لثلث باسكال، ثم احسب الأعداد  $11^2$ ،  $11^3$ ،  $11^4$  باستعمال مثلث باسكال. باستعمال دستور ثنائي الحد، أشرح الظاهرة الملاحظة، ثم فسّر كيف أن هذه الظاهرة لا تصلح من أجل العدد  $11^5$ .

2. وعاء  $U_1$  يحوي كرتين حمراوين وكرة خضراء. وعاء  $U_2$  يحوي كرة حمراء وكرتين خضراوين.

المرحلة الأولى: نلقي زهرة التردد المكعبة متقنة الصنع.

المرحلة الثانية: إذا ظهر الوجه 6 فإننا نسحب كرة من الوعاء  $U_1$ ، وإذا لم يظهر 6 فإننا نسحب الكرة من الوعاء  $U_2$ .

احسب احتمال تحقق كلا من الحادثتين:  $A$ : نحصل في الزهرة على 6 ونسحب كرة حمراء.  $B$ : الحصول على كرة حمراء في نهاية المرحلة الثانية.

3. يحوي وعاء 4 كرات مرقمة من 1 إلى 4.

نسحب على التوالي ثلاث كرات مع الإرجاع، ونعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرفق بكل سحبة أصغر رقم يظهر في الكرات الثلاث. عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$ .

4. يحوي وعاء عشر كرات مرقمة من 1 إلى 10. نسحب من هذا الوعاء بالصدفة وفي آن واحد أربع كرات ونهتم بالأرقام التي تحملها.

ما هو عدد مخرج هذا النشاط؟

احسب احتمال تحقق كلا من الحوادث التالية:

$A$  نحصل على رقم واحد مضاعف ثلاثة.  $C$  نحصل بالضبط على رقمين مضاعفين لثلاثة.  $B$  لا نحصل على أي عدد مضاعف ثلاثة.  $D$  نحصل على الأقل على رقم مضاعف ثلاثة.

5. ينقسم مصنع إلى ثلاث وحدات  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  لإنتاج المصابيح الكهربائية.

وحدة الإنتاج  $\alpha$  تغطي 20% من إنتاج المصنع منها 5% غير صالحة للاستعمال.

وحدة الإنتاج  $\beta$  تغطي 30% من إنتاج المصنع منها 4% غير صالحة للاستعمال.

وحدة الإنتاج  $\gamma$  تغطي 50% من إنتاج المصنع منها 1% غير صالحة للاستعمال.

نختار بالصدفة مصباح، احسب احتمال كلا من الحوادث التالية.

$A$ : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة  $\alpha$ .

$B$ : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة  $\gamma$ .

$C$ : المصباح غير صالح وتنتجه الوحدة  $\beta$ .

6. يلعب نسيم لعبة معينة ذات عدة جولات بحيث جطوظ الربح في الجولة الأولى تعادل جطوظ الإخفاق فيها.

نفرض أنه، عندما يربح نسيم جولة فإن احتمال ربح الجولة التي تليها هو 0.6. عندما يخفق نسيم في جولة فإن احتمال الإخفاق في الجولة التي تليها هو 0.7.

من أجل العدد الطبيعي  $n$ ، نضع:  $A_n$  حادثة "يربح نسيم الجولة من الرتبة  $n$ ".

$B_n$  حادثة "يخفق نسيم في الجولة من الرتبة  $n$ ".

• احسب احتمال الحوادث  $A_1$ ،  $B_1$  و  $A_2$  واستنتج احتمال الحادثة  $B_2$ .

• نضع: من أجل كل  $n$  من  $N^*$ :  $X_n = P(A_n)$  و  $Y_n = P(B_n)$

يبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$ ،  $X_{n+1} = 0.6X_n + 0.3Y_n$

و  $Y_{n+1} = 0.4X_n + 0.7Y_n$

• نضع: من أجل كل  $n$  من  $N^*$ :  $V_n = X_n + Y_n$  و  $W_n = 4X_n - 3Y_n$

يبين أن المتتالية  $(V_n)$  ثابتة.

• يبين أن المتتالية  $(W_n)$  هندسية، ثم عبّر عن  $W_n$  و  $X_n$  بدلالة  $n$ .

أدرس تقارب المتتالية العددية  $(X_n)$ .

7. حارس مرمى في كرة القدم يحقق احتمال لصد الضربات الترجيحية يقدر بـ: 0.3.

يتعرض هذا الحارس لخمس ضربات ترجيحية - (نفرض أن هذه الضربات مستقلة).

ما احتمال أن يتصدى هذا الحارس لرمية على الأقل؟. ما احتمال أن يتصدى هذا الحارس للرميات الخمس؟.

8.  $p$  احتمال مرافق للقانون الأسّي الذي كثافته الدالة  $f$  المعرفة على  $[0; +\infty[$

بالدستور:  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

عيّن العدد الحقيقي الموجب تماماً  $\lambda$  بحيث يكون:  $p([0; 2]) = \frac{e^4 - 1}{e^4}$

9. قرّر محمد زيارة مغارة لشراء بعض الحاجيات. دخل محمد المغارة عشوائياً بين الساعة 11:00 و الساعة 12:00 على أن لا تزيد جولته عن 10 دقائق.

ما احتمال أن يتمكن محمد من الاستفادة من التخفيضات التي ستعرضها إدارة المغارة في المدة الزمنية من 11:45 إلى 12:15؟

10. قانون التوزيعات المنتظمة على المجال  $[a; b]$  حيث:  $a < b$  يهتم بسحب عدد حقيقي بطريقة عشوائية من المجال  $[a; b]$ .

يتميز هذا القانون بالخاصة التالية: احتمال كل مجال من  $[a; b]$  متناسب مع طوله.

نفرض أن قانون التوزيعات المنتظمة على المجال  $[a; b]$  هو قانون احتمال مستمر ذات كثافة. أي أنه توجد دالة  $f$  معرفة ومستمرة على المجال  $[a; b]$  بحيث: من أجل كل مجال  $[c; d]$  محتوي في

$$p([c; d]) = \int_c^d f(t) dt \quad \text{لدينا:}$$

مهدف في هذا التمرين إلى تعيين الدالة  $f$ .

• لتكن  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$ .

بين أنه يوجد عدد حقيقي  $k$  بحيث، من أجل كل مجال  $[c; d]$  محتوي في  $[a; b]$  لدينا:

$$F(d) - F(c) = k(d - c)$$

• نعتبر العدد  $x_0$  من المجال  $[a; b]$ ، بين أن الدالة  $F$  تقبل الاشتقاق عند  $x_0$ ، واحسب  $F'(x_0)$ .

• استنتج أن الدالة  $f$  ثابتة على المجال  $[a; b]$ .

• باستعمال المساواة  $p([a; b]) = 1$  أعط عبارة  $f(t)$  من أجل كل  $t$  من  $[a; b]$ .

• ارسم التمثيل البياني للدالة  $f$  على المجال  $[a; b]$ ، وفسر هندسياً النتائج المحصل عليها سابقاً (خذ  $a = -1$  و  $b = 4$ )

تطبيق: نختار عشوائياً عدداً من المجال  $[-1; 4]$  ما احتمال أن يكون هذا العدد في المجال  $[0; 1]$ ؟

ما احتمال أن يكون هذا العدد أصغر من 0.39 - علماً أنه سالب؟

## 7- الأعداد المركبة

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ الأعداد المركبة - التمثيل الهندسي

◆ العدد المركب

تعريف العدد المركب هو عدد من الشكل  $x + iy$  حيث:  $x$  و  $y$  عدداً حقيقيين و  $i$  عدد تخيلي يحقق  $i^2 = -1$ .

نرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز  $\mathbb{C}$ .

للتحفظ

الكتابة  $z = x + iy$  للعدد المركب حيث:  $x$  و  $y$  عدداً حقيقيين

تدعى الشكل الجبري للعدد المركب  $z$

$x$  يدعى الجزء الحقيقي للعدد المركب  $z$  ويرمز له  $\text{Re}(z)$ .

$y$  يدعى الجزء التخيلي للعدد المركب  $z$  ويرمز له  $\text{Im}(z)$ .

من أجل كل عدد مركب  $z$ ،  $z$  عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان  $\text{Im}(z) = 0$ .

$z$  عدد تخيلي إذا وفقط إذا كان  $\text{Re}(z) = 0$ .

$z = x + iy$  و  $z' = x' + iy'$  عدداً مركبين كتبنا بشكلهما الجبري

$z = z'$  يكافئ  $x = x'$  و  $y = y'$  ،  $z = 0$  يكافئ  $x = 0$  و  $y = 0$

$z + z' = (x + x') + i(y + y')$  مجموع عددين مركبين

$z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$  جداء عددين مركبين

## ◆ التمثيل الهندسي

$(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر.

• لكل عدد مركب  $z = x + iy$  (حيث:  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان) نرفق

النقطة  $M$  من المستوي إحداثياتها  $(x; y)$  في المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، أو نرفق

الشعاع  $\overrightarrow{OM}$  إحداثياته  $(x; y)$  في نفس المعلم.

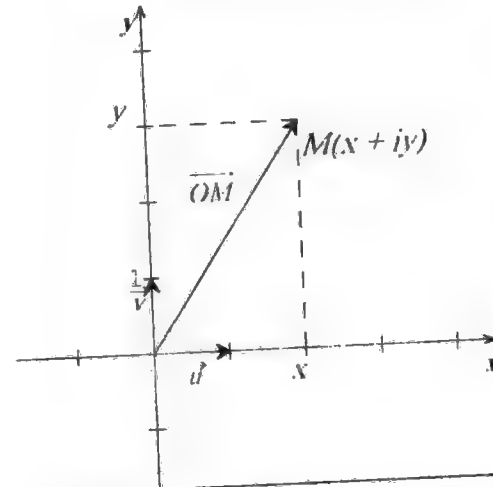
$M$  تدعى النقطة الصورة للعدد المركب  $z$ .

$\overrightarrow{OM}$  يدعى الشعاع الصورة للعدد المركب  $z$ .

• لكل نقطة  $M$  من المستوي إحداثياتها  $(x; y)$  في المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،

نرفق عدد مركب  $x + iy$  ويدعى لاحقة النقطة  $M$ ، أو لاحقة

الشعاع  $\overrightarrow{OM}$ .



## للحفظ

$(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم

متعامد ومتجانس مباشر للمستوي.

$A$  و  $B$  نقطتان من المستوي

لاحقتاهما على الترتيب

$z_A$  و  $z_B$ .

لاحقة الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  هي العدد

المركب  $z_B - z_A$ .

لاحقة منتصف القطعة المستقيمة  $[AB]$  هو العدد المركب  $\frac{z_A + z_B}{2}$ .

•  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  شعاعان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب  $z$  و  $z'$ .

الشعاعان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كان  $z = kz'$  حيث  $k \in \mathbb{R}$ .

العدد المركب  $z$  حقيقي إذا وفقط إذا كانت صورته  $M$  تقع على محور القواصل.

العدد المركب  $z$  تخيلي إذا وفقط إذا كانت صورته  $M$  تقع على محور الترتيب.

## ◆ مرافق عدد مركب

## تعريف

$z$  عدد مركب يكتب بالشكل الجبري  $x + iy$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان.

مرافق العدد المركب  $z$  هو العدد المركب الذي نرمز له  $\bar{z}$  ويكتب بالشكل

$$\bar{z} = x - iy$$

## للحفظ

• في المستوي المركب، صورتا العددين المركبين المترافقين

متناظرتان بالنسبة لمحور القواصل.

•  $z$  و  $\bar{z}$  عدنان مركبان.

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}, \quad \overline{z'} = \bar{z} \quad , \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}}, \quad \bar{\bar{z}} = z.$$

$$z \neq 0 / \left(\frac{\bar{z'}}{z}\right) = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) \quad , \quad z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z).$$

•  $z$  عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان  $\bar{z} = z$ .

•  $z$  عدد تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان  $\bar{z} = -z$ .

## ◆ طولية و عمدة عدد مركب غير معدوم

## تعريف

$z$  عدد مركب غير معدوم يكتب بالشكل الجبري

$x + iy$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان.

$M$  صورة للعدد المركب  $z$  في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد

و المتجانس المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . الإحداثيات القطبية للنقطة  $M$ .

$r$  يدعى طولية العدد المركب  $z$  ويرمز له  $|z|$ .

$\theta$  يدعى عمدة العدد المركب  $z$  ويرمز له  $\arg(z)$ .

للحفظ

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والتجانس المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

إذا كانت النقطة  $M$  صورة للعدد المركب  $z$  فإن  $\|z\| = \|\vec{OM}\| = OM$ .

إذا كانت النقطتان  $A$  و  $B$  صورتين للعددين المركبين  $z_A$  و  $z_B$  فإن  $AB = |z_B - z_A| = \|\vec{AB}\|$ .

• من أجل كل عددين مركبين  $z$  و  $z'$  لدينا:

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|, \quad |zz'| = |z| \times |z'|, \quad |z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$$

$$n \in \mathbb{N} / |z^n| = |z|^n, \quad |z|^2 = z \bar{z}$$

$$z \neq 0 \quad \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}, \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

$$z = 0 \quad \text{يكافئ} \quad |z| = 0$$

$$\bar{z} = \frac{1}{z} \quad \text{يكافئ} \quad |z| = 1$$

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم

للحفظ

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والتجانس المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

إذا كانت النقطة  $M$  صورة للعدد المركب غير المعدوم  $z$  فإن  $\arg(z) = (\vec{i}; \vec{OM})$ .

إذا كانت النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  المتمايزة صور الأعداد المركبة  $z_A$ ،  $z_B$ ،  $z_C$  فإن:

$$(\vec{AB}; \vec{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad \text{و} \quad (\vec{i}; \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

للحفظ

$$\arg(z) = k\pi \quad \text{يكافئ} \quad z \in \mathbb{R}^* \quad \arg(z) = -\arg(\bar{z}) + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z} / \arg(z) = \pi + \arg(-z) + 2k\pi$$

للحفظ

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z [2\pi], \quad \arg(z z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

$$n \in \mathbb{N} / \arg z^n \equiv n \arg z [2\pi], \quad \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg z' - \arg z [2\pi]$$

♦ الشكل المثلي لعدد مركب غير معدوم

تعريف

$z$  عدد مركب غير معدوم،  $r$  عدد حقيقي موجب تماماً و  $\theta$

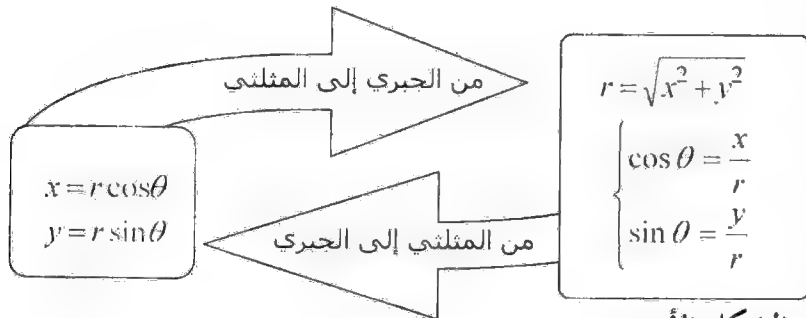
عدد حقيقي كفي.

$r$  طول العدد  $z$  و  $\theta$  عمدة له إذا وفقط إذا كان  $z$  يكتب بالشكل

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

هذه الكتابة للعدد  $z$  تدعى الشكل المثلي للعدد المركب  $z$ .

الانتقال من الشكل المثلي إلى الشكل الجبري والعكس



♦ الشكل الأسّي

تعريف

$z$  عدد مركب غير معدوم،  $r$  عدد حقيقي موجب

تماماً و  $\theta$  عدد حقيقي كفي.

للعدد المركب  $z$  كتابة من الشكل  $z = r e^{i\theta}$  تدعى الشكل الأسّي للعدد  $z$ .



## ♦ الجذور النونية لعدد مركب

## مبرهنة 2

$u$  عدد مركب غير معدوم، طويلته  $r$  والعدد الحقيقي  $\theta$  عمدة له.  
العدد  $u$  له  $n$  جذر نوني وهي حلول المعادلة  $z^n = u$  ذات  
المجهول المركب  $z$ . هذه الحلول كلها من الشكل:  
$$k \in \{0; 1; 2; \dots; (n-1)\} \quad / \quad z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{(\theta + 2k\pi)}{n}}$$

## للحفظ

في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  
المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  $u \in \mathbb{C}^*$  و  $n$  عدد طبيعي.  
صور حلول المعادلة  $z^n = u$  ذات المجهول المركب  $z$  حيث  $(n \geq 3)$ ، هي  
رؤوس مضلع منتظم عدد أضلاعه  $n$  مرسوم داخل الدائرة التي مركزها  $O$   
ونصف قطرها  $\sqrt[n]{|u|}$ .

## ★ الأعداد المركبة والتحويلات النقطية في المستوي

المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  
النقطتان  $M$  و  $M'$  صورتي العددين المركبين  $z$  و  $z'$  على الترتيب.  
 $f$  الدالة ذات المتغير المركب  $z$  المرفقة بالتحويل النقطي  $T$  حيث:

$$f(z) = z' \quad \text{يكافئ} \quad T(M) = M'$$

الجدول التالي يلخص التعريف الهندسي والتعريف المركب للتحويل النقطي.

## خواص

$r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$  يكافئ  $r = r'$  و  $\theta = \theta' + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$ .

$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$  يكافئ  $r = r'$  و  $\theta = \theta' + 2k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$ .

من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{Z}$ ،  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ .

و  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$  (دستور موافق)

$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  و  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$  (دستور أولر)

## ★ المعادلات من الدرجة الثانية

## ♦ الجذران التربيعيان لعدد مركب

عدد مركب غير معدوم و  $\theta$  عمدة له. المعادلة  $z^2 = u$  تقبل في المجموعة  $\mathbb{C}^*$

حين متعاكسين هما:  $\sqrt{|u|} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$  و  $-\sqrt{|u|} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$

ويدعيان الجذران التربيعيان للعدد  $u$ .

## مبرهنة 1

المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  حيث  $a, b, c$  أعداد مركبة و  $a \neq 0$

تقبل حلين في المجموعة  $\mathbb{C}^*$  هما:  $\frac{-b + \delta}{2a}$  و  $\frac{-b - \delta}{2a}$

حيث:  $\delta$  جذر تربيعي للعدد  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

## نتيجة

نعتبر المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  حيث  $a, b, c$  أعداد مركبة و  $a \neq 0$

إذا كان  $z_1$  و  $z_2$  حلّي هذه المعادلة فإنه من أجل كل عدد مركب  $z$ ،

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

ولدينا:  $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$  و  $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

$$\text{Im}(z_5) = -5 \text{ و } \text{Re}(z_5) = 0 \leftarrow z_5 = \frac{5}{i} = \frac{5(-i)}{-i^2} = -5i$$

### الأشكال المختلفة لعدد مركب

ضع على الشكل المثلثي ثم الأسّي كلا من الأعداد:

$$z_3 = -1 + i, z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}, z_1 = -3 + i\sqrt{3}$$

ضع على الشكل الجبري كلا من العددين:

$$z_5 = -3(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}), z_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

2

الحل:  $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$ . لدينا  $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$  نسمي  $\theta_1$  عمدة

$$k \in \mathbb{Z} / \theta_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ إذا: } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ العدد } z_1 \text{ تحقق}$$

$$\text{وبالتالي: } z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}} \text{ و } z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \text{ لدينا } |z_2| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \text{ نسمي } \theta_2 \text{ عمدة}$$

$$k \in \mathbb{Z} / \theta_2 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \text{ إذا: } \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ العدد } z_2 \text{ تحقق}$$

$$\text{وبالتالي: } z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ و } z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{-\pi}{6} + i \sin \frac{-\pi}{6}\right)$$

$$z_3 = -1 + i \text{ لدينا } |z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \text{ نسمي } \theta_3 \text{ عمدة العدد } z_3$$

| التحويل النقطي   | التعريف الهندسي  | التعريف المركب                              |
|--|--|---|
| الانسحاب شعاعه $\vec{v}$ الذي لاحقه $z_1$  | $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$   | $z' = z + z_1$                              |
| التحاكي مركزه $\Omega$ الذي لاحقه $z_\Omega$ ونسبته $k$ . حيث $k \in \mathbb{R}^*$ | $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$   | $z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$           |
| دوران مركزه $\Omega$ الذي لاحقه $z_\Omega$ وزاويته $\theta$                        | $\Omega M' = \Omega M$ و $\arg(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ | $z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega)$ |

### تمارين محلولة

### الكتابة على الشكل الجبري

1 اكتب كلا من الأعداد التالية على الشكل الجبري، ثم عيّن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي.

$$z_5 = \frac{5}{i}, z_4 = \frac{1-i}{i+2}, z_3 = i^5, z_2 = (2i-3)(2+3i), z_1 = (1+i)^3$$

$$\text{الحل: } z_1 = (1+i)^3 = 1+3i+3i^2+i^3 = -2+2i \leftarrow \text{Im}(z_1) = 2, \text{Re}(z_1) = -2$$

$$z_2 = (2i-3)(2+3i) = 4i-6-6-9i = -12-5i \leftarrow \text{Im}(z_2) = -5, \text{Re}(z_2) = -12$$

$$z_3 = i^5 = i \times i^2 \times i^2 = i(-1)(-1) = 1 \leftarrow \text{Im}(z_3) = 0, \text{Re}(z_3) = 1$$

$$z_4 = \frac{1-i}{i+2} = \frac{(1-i)(-i+2)}{(i+2)(-i+2)} = \frac{-i+2+i^2-2i}{1+4} = \frac{1-3i}{5} \leftarrow \text{Im}(z_4) = -\frac{3}{5}, \text{Re}(z_4) = \frac{1}{5}$$

$\Delta = (-2+9i)^2 - 4(-18-6i) = -5-12i$  . تميزها هو  $z^2 + (-2+9i)z - 18-6i = 0$   
 نبحث عن الجذرين التربيعيين للعدد  $\Delta$ .

نضع:  $z = x + iy$  أحد الجذرين التربيعيين للعدد  $\Delta$  حيث:  $x$  و  $y$  عدداً حقيقيين.

$$z^2 = \Delta \text{ يكافئ } (x+iy)^2 = \Delta \text{ يكافئ } x^2 - y^2 + 2ixy = -5-12i$$

$$z^2 = \Delta \text{ يكافئ } \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \text{ يكافئ } z = -2+3i \text{ أو } z = 2-3i$$

لاحظ

يمكن إضافة معادلة ثالثة مساعدة لحل الجملة  
 وهي:  $x^2 + y^2 = 13$  نتج من تساوي  
 الطولين للعددين  $z$  و  $\Delta$  وهي في اتجاه  
 واحد.

$$|z_1| = |z_2| \text{ يستلزم } z_1 = z_2$$

إذاً: حلّي المعادلة هما:

$$z' = \frac{(2-9i) - (2-3i)}{2} = -3i$$

$$z'' = \frac{(2-9i) + (2-3i)}{2} = 2-6i$$

وبالتالي  $S = \{z'; z''\}$ .

• نبحث عن العدد الحقيقي  $z_0$  الذي يحقق  $f(z_0) = 0$ .

$$f(z_0) = 0 \text{ يكافئ } z_0^3 + 9iz_0^2 + 2(6i-11)z_0 - 3(4i+12) = 0$$

$$(z_0^3 - 22z_0 - 36) + (9z_0^2 + 12z_0 - 12)i = 0$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} z_0^3 - 22z_0 - 36 = 0 \\ 9z_0^2 + 12z_0 - 12 = 0 \end{cases} \text{ أي } z_0 = -2 \text{ وهو حل حقيقي للمعادلة } f(z) = 0.$$

لايجاد الحلول الأخرى للمعادلة  $f(z) = 0$ ، نحلّل العدد  $f'(z)$  إلى جداء عاملين أحدهما من الدرجة الأولى نعرفه والآخر من الدرجة الثانية نبحث عنه، باستعمال جدول هورنر (مثلاً)

| معاملات $f'(z)$ | 1 | $9i$   | $12i-22$ | $-12i-36$ |
|-----------------|---|--------|----------|-----------|
| حل حقيقي ؟      |   | -2     | $-18i+4$ | $12i+36$  |
| معاملات هورنر   | 1 | $9i-2$ | $-6i-18$ | 0         |

يعني أن:  $f(z) = (z+2)(z^2 + (9i-2)z - 6i-18)$  من أجل كل  $z$  من  $C$ .

$$f(z) = 0 \text{ يكافئ } z+2=0 \text{ أو } z^2 + (9i-2)z - 6i-18=0 \text{ حلت سابقاً}$$

$$\text{يكافئ } z = -2 \text{ أو } z = 2-6i \text{ أو } z = -3i$$

وبالتالي:  $S = \{-2; -3i; 2-6i\}$ .

$$\text{تحقق } \begin{cases} \cos \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta_3 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ إذاً: } k \in \mathbb{Z} / \theta_3 = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{وبالتالي: } z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ و } z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$z_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ يعني أن } |z_4| = 2 \text{ و } \arg z_4 = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{إذاً: } z_4 = 1 - i\sqrt{3} \text{ أي } z_4 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$$

$$\arg z_5 = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ و } |z_5| = 3 \text{ يعني أن } z_5 = -3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\text{إذاً: } z_5 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ أي } z_5 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

### حل معادلات في C

• حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلات التالية:

$$z^2 + (-2+9i)z - 18-6i = 0, 3z^2 + z + 1 = 0, 3z^2 + z - 1 = 0$$

$$\bullet \text{ نعتبر العبارة } f(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12)$$

ذات المتغير  $z$  من  $C$ .

يبين أن المعادلة  $f(z) = 0$  تقبل حلاً حقيقياً في  $C$ .

حل في  $C$  المعادلة  $f(z) = 0$ .

3

$$\text{الحل: } 3z^2 + z - 1 = 0. \text{ تميزها هو } \Delta = 13 \text{ حليها هما: } z' = \frac{-1-\sqrt{13}}{6} \text{ و } z'' = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$$

$$S = \{z'; z''\} \text{ إذاً: } z'' = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$$

$$3z^2 + z + 1 = 0. \text{ تميزها هو } \Delta = -11 = (i\sqrt{11})^2 \text{ حليها هما:}$$

$$S = \{z'; z''\} \text{ إذاً: } z'' = \frac{-1+i\sqrt{11}}{6} \text{ و } z' = \frac{-1-i\sqrt{11}}{6}$$

## التعرف على مجموعة النقط

في المستوى المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

نعتبر النقطة  $M$  إحداثياتها  $(\sqrt{3}; 1)$  صورة العدد المركب  $z$ .

عين وأنشئ  $(P_1)$  و  $(P_2)$  مجموعتي النقط  $M$  من المستوى حيث:

$$(P_1): |z+4|=2 \quad (P_2): |z-1-i|=|z+3-2i|$$

4

الحل:  $(P_1): |z+4|=2$  تكافئ  $AM=2$  حيث  $A$  صورة العدد  $-4$ .

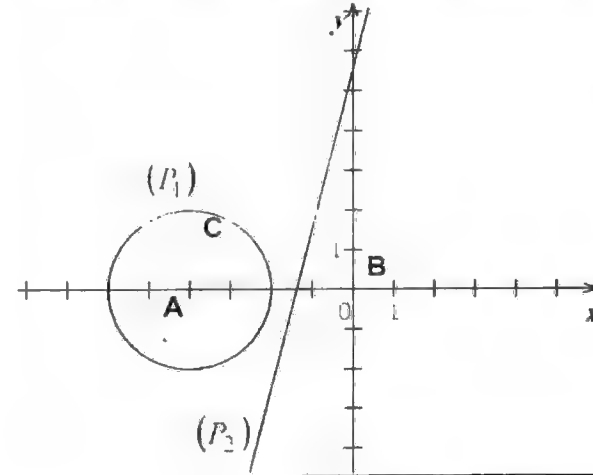
إذا:  $(P_1)$  الدائرة التي مركزها  $A$  ونصف قطرها 2.

حيث  $B$  صورة العدد  $(P_2): |z-1-i|=|z+3-2i|$  تكافئ  $BM=C'M$  حيث  $C'$  صورة  $(1+i)$

العدد  $(2i-3)$ .

إذا:  $(P_2)$  هي محور

القطعة المستقيمة  $[BC]$ .



## التحويلات النقطية والأعداد المركبة

$A$  صورة العدد المركب  $1 + \sqrt{3} + i$  في المستوى المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

$s$  الناظر المركزي الذي مركزه  $O$ ، الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

$h$  التجاكي الذي مركزه  $O$  ونسبته  $\sqrt{3}$ .

أحسب لاحقة كلا من النقط  $B, C, D$  علماً أن:  $B = s(A)$

$C = r(A)$ ،  $D = h(C)$  (يتبع)

5

5

• يبين أن  $A$  هي صورة  $B$  بالدوران الذي مركزه  $D$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

استنتج طبيعة المثلث  $ABD$ .

الحل:  $B = s(A)$  يكافئ  $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$  معناه  $z_B = -z_A$  أي  $z_B = 1 - \sqrt{3} - i$

$C' = r(A)$  يكافئ  $z_{C'} = e^{i\pi/2} z_A$  معناه  $z_{C'} = i z_A$  أي  $z_{C'} = -1 + i(-1 + \sqrt{3})$

$D = h(C')$  يكافئ  $z_D = \sqrt{3} z_{C'}$  أي  $z_D = -\sqrt{3} + i(3 - \sqrt{3})$

• يكفي التحقق من العلاقة:  $z_A - z_D = e^{i\pi/3} (z_B - z_D)$

لدينا من جهة:  $z_A - z_D = -1 + \sqrt{3} + i - (-\sqrt{3} + i(3 - \sqrt{3})) = (2\sqrt{3} - 1) + i(-2 + \sqrt{3})$

ومن جهة أخرى:  $e^{i\pi/3} (z_B - z_D) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (1 - \sqrt{3} - i + \sqrt{3} - i(3 - \sqrt{3})) = (2\sqrt{3} - 1) + i(-2 + \sqrt{3})$

وبالتالي:  $z_A - z_D = e^{i\pi/3} (z_B - z_D)$  إذاً  $A$  هي صورة  $B$  بالدوران الذي مركزه  $D$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

• الكتابة الأخيرة تعني أن:  $\left(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  و  $DA = DB$

هذا يعني أن المثلث  $ABD$  متساوي الساقين وزاوية الرأس الأساس  $D$  هي  $60^\circ$ .

وبالتالي المثلث  $ABD$  متقايس الأضلاع.

## تمارين للتدريب

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C$  المعادلات التالية:

$$-z^2 + 2z - 11 = 0, \quad 2z + i\bar{z} + 8i = 0, \quad 2z + i - (3 - i)^2 = 7i + iz - 1$$

$$\alpha \in \mathbb{R} / z^2 - 2z \sin \alpha + 1 = 0, \quad z^3 + z^2 + z + 1 = 0, \quad z^4 + (3 - 4i)z^2 - 12i = 0$$

$$\alpha \in ]0; \pi[ / z^2 \sin^2 \alpha + z \sin 2\alpha + 1 = 0$$

2. نعتبر العددين المركبين  $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$  و  $z_2 = 2 + 2i\sqrt{3}$

اكتب على الشكل المثلي الأعداد التالي:  $z_1, z_2, z_1 z_2, \frac{z_2}{z_1}$ . استنتج قيمة

كلا من العددين  $\cos \frac{7\pi}{12}$  و  $\sin \frac{7\pi}{12}$ .

3. الدالة المعرفة على المجموعة  $C' - \{-i\}$  بالدستور:  $f(z) = \frac{iz}{z+i}$

نعتبر النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  في المستوى المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \bar{i}; \bar{j})$ .

• عيّن إحداثيات النقطة  $A$  ذات اللاحقة  $z_0$  حيث:  $f(z_0) = 1 + 2i$ .

• من أجل كل عدد مركب  $z$  من  $C' - \{-i\}$ ، نضع:  $r$  طولية العدد  $(z+i)$  و العدد  $\alpha$  عمدة له.

أعط الشكل المثلي للعدد المركب  $f(z) + i$  بدلالة  $r$  و  $\alpha$ .

• نعتبر النقطة  $I$  ذات اللاحقة  $-i$ .

• عيّن مجموعة النقط  $M$  من المستوى والتي تحقق:  $|f(z) + i| = \sqrt{2}$ .

• عيّن مجموعة النقط  $M'$  من المستوى والتي تحقق:  $\arg(f(z) + i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

• بيّن أن النقطة  $A$  تنتمي إلى  $\Omega \cap \Omega'$ ، ثم أنشئ المجموعتين  $\Omega$  و  $\Omega'$ .

4. في المستوى المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \bar{i}; \bar{j})$ ،

نعتبر النقط  $A, B, C$  التي لواحقها على الترتيب  $z_A = -2, z_B = 1 + i$ ،

$$z_C = -1 - 3i$$

• تعرّف على طبيعة المثلث  $ABC$ .

• من أجل كل عدد مركب  $z \neq 1 + i$  نضع:  $Z = \frac{z+1+3i}{z-1-i}$

• فسّر هندسيا طولية وعمدة العدد المركب  $Z$ .

• عيّن وأنشئ  $\Lambda$  مجموعة النقط  $M$  صور العدد  $z$  بحيث:  $|Z| = 1$ .

• عيّن وأنشئ  $\Psi$  مجموعة النقط  $M$  صور العدد  $z$  بحيث يكون  $Z$  تخيلي صرف.

5. في المستوى المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \bar{i}; \bar{j})$ ، نعتبر النقطة  $A$

ذات اللاحقة  $1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي  $\theta$  من المجال  $[0; 2\pi]$  النقطة  $M$  ذات

اللاحقة  $z = e^{i\theta}$ .

نضع:  $P$  و  $Q$  النقطتان ذات اللاحقتان  $z+1$  و  $z^2$  على التوالي.

• انطلاقا من النقطة  $M$  أعط إنشاء هندسيا لكل من النقطتين  $P$  و  $Q$ . ضع

النقط  $O, A, M, P$  و  $Q$  في نفس الشكل.

• عيّن وأنشئ مجموعة النقط  $P$  من المستوى عندما يتغير  $\theta$  في  $[0; 2\pi]$ .

• نضع:  $S$  لاحقة العدد المركب  $(z^2 + z + 1)$  حيث  $z$  يمثل دائما لاحقة النقطة  $M$ .

• عيّن وأنشئ مجموعة النقط  $S$ .

• في حالة  $S \neq O$ ، أنشئ المستقيم  $(OS)$  وضع تخميننا حول النقط  $O, S$  و  $M$ .

• بيّن أن العدد  $\frac{z^2 + z + 1}{z}$  حقيقي من أجل كل  $\theta$  من المجال  $[0; 2\pi]$ . استنتج.

6. المستوى المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس المباشر  $(O; \bar{i}; \bar{j})$ .

• حل في مجموعة الأعداد المركبة  $C'$  المعادلة:  $z^3 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$ .

• نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  ذات اللاحقتين  $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$  و  $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$

• أكتب العددين  $z_A$  و  $z_B$  على الشكل الأسّي.

• احسب المسافات  $OA, OB, AB$ ، واستنتج طبيعة المثلث  $OAB$ .

• نعتبر النقطة  $E$  صورة العدد المركب  $i - \sqrt{3}$  و النقطة  $D$  صورهما بالدوران الذي مركزه

وزاويته  $-\frac{\pi}{3}$ . عيّن اللاحقة  $d$  للنقطة  $D$ .

• نعتبر النقطة  $G$  مرجح الحملة المثقلة  $\{(O; -1); (D; 1); (B; 1)\}$ .

تحقق من وجود النقطة  $G$ ، ثم عيّن لاحقتها  $g$ . بيّن أن النقط  $E, D, G$  على استقامة واحدة.

7.  $f$  التحويل النقطي في المستوى الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$ ، النقطة  $M'$  ذات

اللاحقة  $z' = 3z + 3 - i$  حيث:

• بيّن أن للتحويل النقطي  $f$  نقطة صامدة واحدة  $\Omega$  يضرب عيّن لاحقتها  $\omega$ .

• تحقق أن:  $\omega = 3(z - \omega)$  و استنتج طبيعة  $f$ .

8.  $f$  التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$ ، النقطة  $M'$  ذات

$$اللاحقة 'z حيث: z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z.$$

بين أن  $f$  دوراناً مركزه  $O$  يطلب تعيين زاويته. عيّن صورة حامل محور الفواصل بالدوران  $f$ .

9.  $s$  التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$ ، النقطة  $M'$

$$ذات اللاحقة 'z حيث: z' = -z + 4.$$

• بين أن للتحويل النقطي  $s$  نقطة صامدة واحدة  $A$ ، يطلب تعيين لاحقتها  $a$ .

• بين أن  $s$  هو التناظر المركزي والذي مركزه  $A$ .

• الدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ ، نضع:  $M'' = (r \circ s)(M)$ .

• أنشئ النقطة  $M''$  من أجل  $z = 3 + i$ .

بين أن النقطة  $M''$  هي صورة النقطة  $M$  بدوران يطلب تعيين مركزه وزاويته.

10. المستوي المركب المزود بالمعجم المتعامد والمنحانيس المباشر  $(O; \bar{i}; j)$ .

$T$  التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات الإحداثيات  $(x; y)$ ، النقطة  $M'$  ذات الإحداثيات  $(x'; y')$

$$حيث: \begin{cases} x' = ax - by + a' \\ y' = bx + ay + b' \end{cases} , a, b, a', b' \text{ أعداد حقيقية.}$$

• بين أن اللاحقتين  $z$  و  $z'$  للنقطتين  $M$  و  $M'$  على الترتيب تحققان العلاقة  $z' = mz + p$

حيث  $m$  و  $p$  عددان مركبان يطلب تعيينهما بدلالة الأعداد  $a, b, a', b'$ .

• عيّن الأعداد  $a, b, a', b'$  حتى يكون التحويل النقطي  $T$  انسحاباً شعاعه  $\bar{j} + 2\bar{i}$ .

• عيّن الأعداد  $a, b, a', b'$  حتى يكون التحويل النقطي  $T$  تحاك نسبته 3 ومركزه  $A(1; 2)$ .

• عيّن الأعداد  $a, b, a', b'$  حتى يكون التحويل النقطي  $T$  دوراناً زاويته  $\frac{3\pi}{4}$  ومركزه  $I(0; 2)$ .

## 8- التشابهات المستوية المباشرة

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ عموميات حول التشابهات المستوية

### تعريف

التشابه المستوي هو التحويل النقطي في المستوي الذي يحافظ على تناسب المسافات.

أي: من أجل النقط الأربعة  $A, B, C$  و  $A', B', C'$  وصورها  $D$  و  $D'$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \quad \text{و } D' \text{ على الترتيب بالتشابه المستوي، لدينا:}$$

أي: التشابه المستوي هو التحويل النقطي في المستوي الذي يضاعف المسافات  $k$  مرة.

العدد الحقيقي الموجب تماماً  $k$  يدعى نسبة التشابه.

التقايس (أو تساوي القياس) هو التشابه المستوي نسبته 1.

### خواص

• مركب تشاهمين المستوي نسبتهما  $k$  و  $k'$  هو تشابه المستوي نسبته  $kk'$ .

• التحويل العكسي للتشابه المستوي الذي نسبته  $k$  هو التشابه المستوي الذي نسبته  $\frac{1}{k}$ .

• التشابه المستوي يحافظ على استقامية النقط.

• التشابه المستوي يحول كل مثلث  $ABC$  إلى مثلث  $A'B'C'$  يشبهه.

• التشابه المستوي يحافظ على الزوايا.



## ★ التشابه المستوي المباشر

## تعريف

التشابه المستوي المباشر هو التشابه المستوي الذي يحافظ على الزوايا الموجهة.

أي: من أجل النقط الأربعة  $A, B, C, D$  حيث  $A \neq B$  و  $C \neq D$ ، صورها  $A', B', C', D'$  على الترتيب بالتشابه المستوي المباشر، لدينا:  $l \in \mathbb{Z} \mid (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{C'D'}) + 2l\pi$ . الانسحاب، التحاكي، الدوران، هي تشابهات المستوي المباشر.

## خواص

- مركّب تشاكين المستوي المباشر زاويتاهما  $\theta$  و  $\theta'$  هو تشابه المستوي المباشر زاويته  $\theta + \theta'$ .
- التحويل العكسي للتشابه المستوي المباشر الذي زاويته  $\theta$  هو التشابه المستوي المباشر الذي زاويته  $-\theta$ .
- التشابه المستوي المركّب يحوّل النقطة ذات اللاحقة  $z$  إلى النقطة ذات اللاحقة  $z' = az + b$  معرّف بالعبارة:  $z' = az + b$  حيث  $a \neq 0$  و  $b$  عدنان مركبان.
- في العبارة  $z' = az + b$  حيث  $a \neq 0$  لدينا:  $\arg(a)$  يدعى زاوية التشابه المستوي المباشر.
- التشابه المستوي المباشر الذي يختلف عن الانسحاب، يقبل نقطة صامدة واحدة تدعى مركزه.

## للمحظ

$S$  تشابه المستوي المباشر نسبته  $k$  وزاويته  $\theta$  ومركزه النقطة الصامدة  $\Omega$ . ( $S$  ليس انسحاب).  
 •  $S$  هو مركّب (تبديلي) للتحاكي الذي مركزه  $\Omega$  ونسبته  $k$  مع الدوران الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\theta$ .  
 •  $S$  تشابه المستوي المباشر نسبته  $k$  وزاويته  $\theta$  ومركزه النقطة الصامدة  $\Omega$ .  
 ( $S$  ليس انسحاب)، يحوّل النقطة  $M$  (حيث  $M \neq \Omega$ ) إلى النقطة  $M'$  حيث:  $\Omega M' = k\Omega M$  و  $[\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}] \equiv \theta [2\pi]$  يتبع...

- $S$  تشابه المستوي المباشر نسبته  $k$  وزاويته  $\theta$  ومركزه النقطة الصامدة  $\Omega$ . ( $S$  ليس انسحاب)، يحوّل النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  (حيث  $M \neq \Omega$ ) إلى النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  يعطى بالعبارة:  $z' = ke^{i\theta}z$  ( $z = w$ ) للاحقة  $\Omega$ .
- التشابه المستوي المباشر يحافظ على تشابه مباشر للمثلثات، ويحافظ على مرجح الحملة المثقلة.
- التشابه المستوي المباشر يحوّل المستقيم على مستقيم، والقطعة المستقيمة إلى قطعة مستقيمة، والدائرة إلى دائرة.
- التشابه المستوي الذي يترك ثلاث نقط صامدة ليست على استقامة واحدة هو التحويل المطابق.
- التشابه المستوي الذي يترك نقطتان صامدتان  $A$  و  $B$  متميزتان هو التحويل المطابق أو التناظر المحوري بالنسبة للمستقيم  $(AB)$ .
- من أجل كل أربع نقط  $A, B, C, D$  حيث  $A \neq B$  و  $C \neq D$ ، يوجد تشابه المستوي المباشر  $f$  وحيد حيث:  $f(A) = C$  و  $f(B) = D$ .

## ★ الإزاحة

## تعريف

الإزاحة هو تشابه المستوي المباشر نسبته 1. أي: الإزاحة هو تقايس يحافظ على الزوايا الموجهة.

## للمحظ

نعتبر  $S$  التشابه المستوي. لدينا حالتين:

- ① إما  $S$  التشابه المستوي المباشر.
- ② إما  $S$  هو مركّب تشابه المستوي المباشر مع تناظر محوري بالنسبة لـ  $\Delta$  (بختار كيفاً). في هذه الحالة الثانية  $S$  يحوّل كل زاوية إلى زاوية معاكسة. ويدعى  $S$  التشابه المستوي غير المباشر محوره  $\Delta$ .

الإزاحة هو  
الانسحاب أو  
الدوران

## تمارين محلولة

## التعرّف على التشابه المستوي

|   |   |
|---|---|
| 1 | <p><math>(O; \vec{i}; \vec{j})</math> معلم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر.</p> <p><math>f</math> الدالة في المستوي ترفق بكل نقطة ذات اللاحقة <math>z</math> النقطة ذات اللاحقة <math>z'</math> حيث: <math>z' = (1-i)z + 2 - i</math>.</p> <p>بين أن الدالة <math>f</math> هي التشابه المستوي المباشر بطلب تعيين عناصره المميزة.</p> |
|---|---|

**الحل:** العبارة  $z' = (1-i)z + 2 - i$  هي من الشكل:  $z' = az + b$  حيث:  $a = 1-i$  و  $b = 2 - i$  إذاً:  $f$  هو التشابه المستوي المباشر.

لدينا:  $|a| = |1-i| = \sqrt{2}$  و  $\arg a = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2/\pi$  أي: نسبة التشابه  $f$  هي  $\sqrt{2}$  و زاويته  $-\frac{\pi}{4}$ .

مركز التشابه المستوي المباشر  $f$  هي النقطة الصامدة  $\Omega$  ذات اللاحقة  $z_0$ .

تحقق:  $z_0 = (1-i)z_0 + 2 - i$  أي:  $z_0 = -1 - 2i$ .

## مركّب دوران وتحاك

|   |  |
|---|--|
| 2 | <p><math>A, B, C, D</math> أربع نقط من المستوي <math>\mathcal{M}</math>، لواحقها على الترتيب <math>0, 1, i, 1+i</math> أو <math>i</math>. نعتبر النقطة <math>K</math> منتصف القطعة المستقيمة <math>[AC]</math>.</p> <p><math>h</math> التحاكي الذي مركزه <math>D</math> ونسبته <math>\frac{1}{2}</math> و <math>r</math> الدوران الذي مركزه <math>K</math> وزاويته <math>\frac{\pi}{2}</math>.</p> <p>أعط العبارة المركبة لكل من <math>h</math> و <math>r</math>.</p> <p>استنتج طبيعة التحويل النقطي <math>h \circ r</math> وعناصره المميزة.</p> |
|---|--|

**الحل:** العبارة المركبة للتحاكي  $h$  مركزه  $D$  للاحقتها  $i$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  هي من

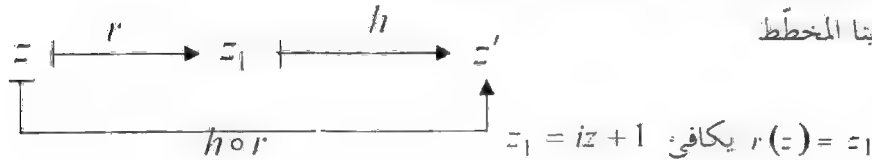
الشكل:  $z' - i = \frac{1}{2}(z - i)$  أي:  $z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i$ .

العبارة المركبة للدوران  $r$  مركزه  $K$  للاحقتها  $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  هي من

الشكل:  $z' - \frac{1+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \frac{1+i}{2})$  أي:  $z' = iz + 1$ .

استخراج العبارة المركبة للتحويل النقطي  $h \circ r$ .

لدينا المخطط



$h(z_1) = z'$  يكافئ  $z' = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}i$ .

أي:  $h[r(z)] = z'$  يكافئ  $z' = \frac{1}{2}(iz + 1) + \frac{1}{2}i = \frac{i}{2}z + \frac{1+i}{2}$ .

هي عبارة مركبة من الشكل:  $z' = az + b$  حيث:  $a = \frac{i}{2}$  و  $b = \frac{1+i}{2}$ .

إذاً:  $h \circ r$  تشابه المستوي المباشر نسبته  $\frac{1}{2}$  و  $|a| = \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$  وزاويته  $\arg a = \frac{\pi}{2}$ .

ومركزه النقطة الصامدة  $\Omega$  ذات اللاحقة  $z_0$  تحقق  $z_0 = \frac{i}{2}z_0 + \frac{1+i}{2}$  أي:  $z_0 = \frac{1+3i}{5}$ .

## التعرّف على المحل الهندسي

|   |  |
|---|--|
| 3 | <p>نعتبر في المستوي الموجه المثلث <math>ABC</math> قائم في <math>H</math> والمتساوي الساقين. <math>M</math> نقطة كيفية من المستقيم <math>(AC)</math> و <math>M'</math> النقطة من المستوي بحيث يكون المثلث <math>MM'A'</math> قائم في <math>M</math> ومتساوي ساقين.</p> <p>• أعط النسبة <math>k</math> والزاوية <math>\theta</math> لتشابه مستوي مباشر <math>s</math> الذي مركزه <math>A</math> ويحول النقطة <math>M</math> إلى النقطة <math>M'</math>.</p> <p>• عيّن مجموعة النقط <math>M'</math> من المستوي عندما تتغير النقطة <math>M</math> على المستقيم <math>(BC)</math>.</p> |
|---|--|

**الحل:** التشابه المستوي المباشر  $s$  مركزه  $I$  وبحول النقطة  $I$  إلى النقطة  $I'$  معناه:

$$AM' = kAM \quad \text{و} \quad \widehat{(AM; AM')} = \theta [2\pi].$$

$$\text{إذا: } k = \frac{AM'}{AM} = \sqrt{2} \quad (\text{حسب علاقة Pythagore}) \quad \text{و} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\text{كون } \hat{A} = \hat{M}' = \frac{\pi}{4} \text{ في المثلث } (AMM').$$

عندما تتغير النقطة  $M$  على المستقيم  $(BC)$  فإن صورتها  $M'$  بالتشابه  $s$  تتغير على المستقيم  $s(BC)$ .

بما أن  $B$  نقطة من  $(BC)$  فإن صورتها

$$s(B) = C \quad \text{نقطة من المستقيم } s(BC).$$

ومن أجل كل نقطة  $M$  من المستقيم  $(BC)$

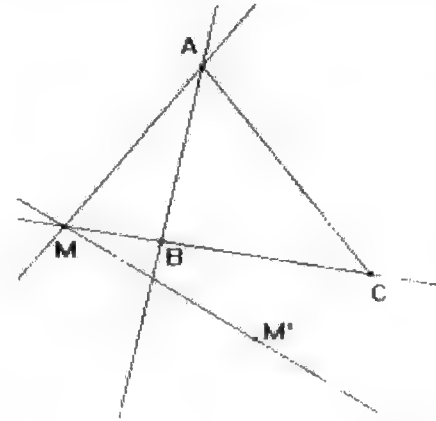
تختلف عن  $B$ ، صورتها  $M'$  تحقق:

$$\widehat{(BAM; C'M')} = \frac{\pi}{4}$$

إذاً: الحل الهندسي للنقطة  $I'$  هو المستقيم الذي

يشمل  $C'$  ويصنع مع المستقيم  $(BAM)$

زاوية قياسها  $\frac{\pi}{4}$



### التشابه المستوي غير المباشر

$(O; \vec{T}; \vec{T})$  معمم للمستوي متعامد ومتجانس مباشر.  $f$  التحويل النقطي في

المستوي الذي يحول النقطة  $M$  ذات الإحداثيات  $(x; y)$  إلى النقطة  $M'$

ذات الإحداثيات  $(x'; y')$  حيث:  $x' = 2y + 2$  و  $y' = 2x - 1$

• بين أن  $f$  يقبل نقطة صامدة واحدة  $\Omega$  يطلب تعيين إحداثياتها.

• بين أن  $f$  تشابه المستوي نسبته 2.

•  $h$  هو التحاكي الذي مركزه  $\Omega$  ونسبته 2 وبحول النقطة  $I$  إلى

النقطة  $M_1$ .

بين أن منتصف القطعة المستقيمة  $[M'M_1]$  يمر من مستقيم  $\Delta$  الذي يشمل

النقطة  $\Omega$ ، يطلب تعيين معادلة للمستقيم  $\Delta$  ماذا نستنتج إذاً عن التشابه  $f$ ؟

4

**الحل:**  $\Omega(x; y)$  صامدة في التحويل  $f$  معناه  $f(\Omega) = \Omega$  أي:  $x = 2y + 2$  و  $y = 2x - 1$

أي:  $x = 0$  و  $y = -1$  بما أن الجملة التحليلية قبلت حلاً واحداً فإن

$\Omega(0; -1)$  وحيدة.

نعتبر  $M(x; y)$  و  $N(a; b)$  نقطتان من المستوي و  $M'$  و  $N'$  صورتيهما على

الترتيب بالتحويل النقطي  $f$ .

$$\text{لدينا إذا: } MN^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 \quad \text{و}$$

$$M'N'^2 = (a' - x')^2 + (b' - y')^2 \\ = 4[(a - x)^2 + (b - y)^2] = 4MN^2$$

أي:  $M'N' = 2MN$  هذا يعني أن  $f$  التشابه المستوي نسبته 2.

$h$  هو التحاكي الذي مركزه  $\Omega$  ونسبته 2 وبحول النقطة  $I$  إلى النقطة  $M_1$  معناه

$$\Omega M_1 = 2\Omega M$$

بوضع:  $M_1(x_1; y_1)$  نحصل على العبارة التحليلية للتحاكي  $h$ :  $x_1 = 2x$  و  $y_1 = 2y + 1$

إذاً: إحداثيات النقطة  $I$  منتصف القطعة  $[M'M_1]$  هي:  $(x_I; y_I)$

$$\text{حيث: } x_I = x + y + 1 \quad \text{و} \quad y_I = x + y$$

ينتج أن:  $x_I = y_I + 1$  وهي العلاقة بين إحداثيات منتصف القطعة  $[M'M_1]$ .

وبالتالي مجموعة منتصفات القطع  $[M'M_1]$  هي المستقيم  $\Delta$  ذي المعادلة:  $y = x - 1$ . واضح أن

إحداثيات  $\Omega$  تحقق معادلة  $\Delta$ .

$$\text{نلاحظ أن } \overrightarrow{M'M_1} = \begin{pmatrix} 2x - 2y - 2 \\ 2y - 2x + 2 \end{pmatrix} = (2x - 2y - 2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{حيث: } \overrightarrow{M'M_1} \perp \vec{n} \quad \text{و } \vec{n} \text{ هو شعاع}$$

ناظم للمستقيم  $\Delta$ .

أي  $\overrightarrow{M'M_1}$  يعامد  $\Delta$  وبما أن منتصف القطعة  $[M'M_1]$  يقع على  $\Delta$ ، فإن  $M'$  و  $M_1$

متناظرتان بالنسبة للمستقيم  $\Delta$ .

إذاً:  $f$  هو التشابه المستوي غير المباشر، مركزه  $\Omega$  ونسبته 2 ومحوره  $\Delta$ .

### التشابه المستوي غير المباشر دو نقطتين صامدتين على الأقل

$(O; \vec{I}; \vec{J})$  معمم للمستوي المركب متعامد ومتجانس مباشر.

$f$  التحويل النقطي في المستوي الذي يحول النقطة  $M$  ذات

5 اللاحقة  $z = -1 + 3i$  إلى النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z' = \frac{4+3i}{5} = -1 + 3i$  حيث:

• عيّن مجموعة النقط الصامدة في التحويل  $f$ .

• عيّن طبيعة التحويل  $f$  وأذكر عناصره المميزة.

**الحل:** النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z = -1 + 3i$  صامدة في التحويل  $f$  معناه  $f(M) = M$

أي:  $z = \frac{4+3i}{5} = -1 + 3i$

يكافئ  $x + iy = \frac{4+3i}{5} = -1 + 3i$  بكافئ  $x + iy = -1 + 3i$  بكافئ  $(x - 3y + 5) + i(-3x + 9y - 15) = 0$

يكافئ  $\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ -3x + 9y - 15 = 0 \end{cases}$  يكافئ  $x - 3y + 5 = 0$

يعني أن مجموعة النقط الصامدة في التحويل  $f$  هي المستقيم  $\Delta$  الذي معادلته

$x - 3y + 5 = 0$

العبارة  $z' = a\bar{z} + b$  هي من الشكل:  $z' = \frac{4+3i}{5} = -1 + 3i$

حيث:  $a = \frac{4+3i}{5}$  و  $b = -1 + 3i$

إذاً:  $f$  هو التشابه المستوي غير المباشر. وبما أن  $f$  يترك أكثر من نقطة صامدة

واحدة وكلها على استقامة واحدة. يعني أن:  $f$  هو تناظر محوري بالنسبة

للمستقيم  $\Delta$ .

### تمارين للتدريب

1.  $ABC'$  مثلث قائم في  $A$  ومتساوي الساقين.  $I$  منتصف القطعة  $[BC']$ .

• أعط العناصر المميزة لكل من التشابه المستوي المباشر  $s$  الذي مركزه  $B$  ويحول  $I$

إلى  $A$  و التشابه المستوي المباشر  $s'$  الذي مركزه  $B$  ويحول  $A$  إلى  $C'$ .

• عيّن طبيعة التحويل النقطي  $s \circ s'$  وأذكر عناصره المميزة.

2.  $(O; \vec{I}; \vec{J})$  معمم للمستوي المركب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  ذات

اللاحقتين  $\sqrt{2}$  و  $i$  على الترتيب.  $(C)$  النقطة من المستوي بحيث يكون الرباعي

$OAC'B$  مستطيل.

نضع:  $I$  منتصف القطعة  $[OA]$  و  $J$  منتصف القطعة  $[BC']$ .

•  $f$  التحويل النقطي في المستوي الذي يحول النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  إلى النقطة

$M'$  ذات اللاحقة  $z' = \frac{-i\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$  حيث:  $z' = \frac{-i\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

• بين أن  $f$  هو التشابه المستوي المباشر ثم عيّن مركزه  $\Omega$  ونسبته  $k$  وزاويته  $\theta$ .

• عيّن صور النقط  $(A)$ ،  $B$  و  $C'$  بالتشابه  $f$ .

• بين أن النقط  $\Omega$ ،  $A$  و  $B$  على استقامة واحدة، وأن النقط  $\Omega$ ،  $I$  و  $J$  على استقامة واحدة.

• استنتج إنشاء للنقطة  $\Omega$ .

• بين أن  $\Omega$  نقطة من الدائرة التي قطرها  $[BC']$  ومن الدائرة التي قطرها  $[IA]$ .

3.  $f$  التحويل النقطي في المستوي المركب، يحول النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  إلى

النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z' = a\bar{z} + b$  حيث:  $z' = a\bar{z} + b$  حيث  $a$  عدد مركب معيّن.

• عيّن مجموعة قيم  $a$  التي من أجلها يكون التحويل  $f$  سحجياً. حدّد  $f$  من أجل كل قيمة

للعدد  $a$  المحصل عليها.

• عيّن مجموعة قيم  $a$  التي من أجلها يكون التحويل  $f$  تناظر مركزي. حدّد  $f$  من أجل كل قيمة

للعدد  $a$  المحصل عليها.

• عيّن مجموعة قيم  $a$  التي من أجلها يكون التحويل  $f$  تحاكٍ نسبته 2. - حدد  $f$  من أجل كل قيمة للعدد  $a$  المحصل عليها.

• عيّن مجموعة قيم  $a$  التي من أجلها يكون التحويل  $f$  دوراناً زاويته  $\frac{\pi}{2}$ . حدد  $f$  من أجل كل قيمة للعدد  $a$  المحصل عليها.

• حدد  $f$  من أجل  $a = 1 - i$ .

4.  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر النقطتين  $A(3; -1)$  و  $B(0; 2)$ .

$h$  التحاكي الذي مركزه  $A$  ونسبته  $\sqrt{2}$ ،  $r$  الدوران الذي مركزه  $B$  وزاويته  $\frac{3\pi}{4}$ ، و  $l$  الانسحاب الذي شعاعه  $\overline{BO}$ .

• أنشئ النقطة  $D$  من المستوي والتي صورتها بالتحويل  $h \circ r \circ l$  هي النقطة  $(C)$ .

• بيّن أن التحويل التقطي  $l \circ r \circ h$  هو التشابه المستوي المباشر  $s$  وعيّن عناصره المميزة.

• ملاحظة أن المثلث  $OD\Omega$  قائم ومتساوي الساقين، أنشئ النقطة  $\Omega$  مركز التشابه  $s$ .

5. نعتبر المربعين المباشرين  $ABCD$  و  $A'B'C'D'$ .

• بيّن أن يوجد التشابه المستوي المباشر  $s$  الذي يحول النقط  $A, B, C$  و  $D$  إلى النقط  $A', B', C', D'$  بهذا الترتيب.

• نفرض أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(A'B')$  متوازيين، ماذا يمكننا القول عن التشابه  $s$ ؟ في حالة وجود مركز للتشابه  $s$  عيّن وضعيته.

• نفرض أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(A'B')$  غير متوازيين، ونعتبر  $P$  نقطة تقاطع المستقيمين  $(AB)$  و  $(A'B')$  و  $Q$  نقطة تقاطع المستقيمين  $(CD)$  و  $(C'D')$ .

• بيّن أن المستقيم  $(PQ)$  يشمل المركز  $\Omega$  للتشابه  $s$ . ثم استنتج إنشاءً للنقطة  $\Omega$ .

6.  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر. نعتبر الرباعي المحدث المباشر

$ABCD$ . ننشئ خارج هذا الرباعي النقط  $M_1, M_2, M_3$  و  $M_4$  بحيث تكون

المثلثات الأربعة  $AM_1B, BM_2C, CM_3D$  و  $DM_4A$  قائمة عند النقط  $M_1, M_2, M_3$  و  $M_4$  على الترتيب ومتساوية الساقين.

• نضع:  $a, h, c$  و  $d$  لواحق النقط  $A, B, C$  و  $D$  على الترتيب  $z_1, z_2, z_3, z_4$  و  $z_4$  لواحق النقط  $M_4, M_3, M_2, M_1$  على الترتيب.

• باعتبار التشابه الذي مركزه  $A$  و يحول النقطة  $B$  إلى النقطة  $M_1$ ,

$$\text{بيّن أن } z_1 = \frac{a + b + i(a - b)}{2}.$$

• عبر عن  $z_2, z_3$  و  $z_4$  بدلالة الأعداد  $a, h, c$  و  $d$ .

• بيّن أن حاملتي القطعتين  $[M_1M_3]$  و  $[M_2M_4]$  متعامدين وأن  $M_1M_3 = M_2M_4$ .

7.  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.  $f$  التحويل النقطي في

المستوي الذي يحول النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  إلى النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$

$$\text{حيث: } z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

• عيّن صورة النقطة  $A$  ذات اللاحقة 2 بالتحويل  $f$ ، ولاحقة النقطة  $B$  حيث:  $f(B) = O$ .

• تعرّف على طبيعة التحويل  $f$  واذكر عناصره المميزة.

• في حالة  $M \neq A$  بيّن أن المثلث  $AMM'$  قائم في النقطة  $M'$ .

8.  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

• عيّن (E) مجموعة النقط  $M$  من المستوي والتي لاحتقها  $z$  تحقق:  $|(1 - i\sqrt{3})z - i - \sqrt{3}| = 4$ .

• أعط العبارة المركبة للتشابه المستوي المباشر  $s$  الذي يحول النقطة  $A$  ذات اللاحقة  $i$  إلى النقطة  $O$  و يحول النقطة  $B$  ذات اللاحقة  $\sqrt{3}$  إلى النقطة  $B'$  ذات اللاحقة  $4i$ . - معيّناً مركز ونسبة وزاوية التشابه  $s$ .

• باستعمال نتائج السؤال السابق، أوجد المجموعة (F) المعرّفة في التمرين.

9.  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي المركّب متعامد ومتجانس مباشر.

$s$  التشابه المستوي المباشر، مركزه  $O$  ونسبته  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{6}$ .

من أجل  $n$  عدد طبيعي، نعتبر مجموعة النقط  $M_n$  المعرّفة بـ:  $M_{n+1} = s(M_n)$

## 9- الهندسة الفضائية

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ الجداء السلمي في الفضاء

تعريف

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$  شعاعان من الفضاء.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  ثلاث نقط من الفضاء نختار:  $A, B, C$

يوجد على الأقل مستوى  $P$  يشمل نقط  $A, B, C$ .

الجداء السلمي للشعاعين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  في الفضاء هو الجداء السلمي للشعاعين

$\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  في المستوي  $P$ . وهو العدد الحقيقي  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  المعروف بـ:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$  حيث:  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $\vec{v} \neq \vec{0}$

و  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  من أجل  $\vec{u} = \vec{0}$  أو  $\vec{v} = \vec{0}$

★ التعامد في الفضاء

للحفظ

•  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  شعاعان من الفضاء متعامدان معناه  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

• المستقيمان  $(D)$  و  $(D')$  من الفضاء متعامدان معناه شعاعي توجيههما

$\vec{d}(D)$  و  $\vec{d}(D')$  متعامدان.

• الشعاع  $\vec{n}$  ناظم على المستقيم  $(D)$  معناه  $\vec{n}$  يعامد شعاع التوجيه

$\vec{d}(D)$  للمستقيم  $(D)$ .

• الشعاع  $\vec{n}$  ناظم على المستوي  $(P)$  في الفضاء معناه  $\vec{n}$  يعامد شعاعان

غير مرتبطين خطياً من  $(P)$ .

يتبع...

و  $M_0$  النقطة ذات اللاحقة 1.

نرمز بـ:  $\varepsilon_n$  للاحقة النقطة  $M_n$ .

• أعط العبارة المركبة للتشابه المستوي المباشر  $\gamma$ .

• بين أن المتتالية  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  هندسية، واكتب عبارة  $\varepsilon_n$  بدلالة  $n$ .

• احسب  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  و  $\varepsilon_n$ .

• احسب  $OM_n$  بدلالة  $n$ .

• بين أن  $\frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  واستنتج أن:  $(M_n M_{n+1}) \perp (OM_{n+1})$

وأن  $M_n M_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n$

• نضع:  $K_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_n M_{n+1}$ . عبّر عن  $K_n$  بدلالة  $n$ .

• احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$ .

10.  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم للمستوي المركب متعامد ومتجانس مباشر.

$(D)$  المستقيم الذي يشمل المبدأ  $O$  و  $\vec{u}$  شعاع توجيه له.

نرمز بـ:  $\alpha$  لقياس الزاوية  $(\vec{i}; \vec{u})$ .

• تحقق أن النقطة  $A$  ذات اللاحقة  $e^{i\alpha}$  تنتمي إلى المستقيم  $(D)$ .

• استنتج أن العبارة المركبة للتناظر المحوري  $S_{(D)}$  بالنسبة للمستقيم  $(D)$  هي:

$\vec{z}' = e^{2i\alpha} \vec{z}$ .

• ضع الشكل النهائي للعبارة المركبة للتحويل  $S_{(D)}$  في كل من الحالتين:

$(D): x - y\sqrt{3} = 0$ ,  $(D): y = -x$



## تمارين محلولة

## التعامد في الفضاء

$A, B, C, D$  أربع نقط من الفضاء.

• برهن صحة التكافؤ التالي:

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \text{ إذا وفقط إذا كان المستقيمان } (AB)$$

و  $(CD)$  متعامدان.

1

•  $ABCD$  رباعي الوجود حيث  $(AB)$  و  $(CD)$  متعامدان و  $(AD)$

و  $(BC)$  متعامدان.

بين أن المستقيمان  $(AC)$  و  $(BD)$  متعامدان.

الحل:  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$  يكافئ  $(AC^2 - AD^2) + (BD^2 - BC^2) = 0$

$$(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 0 \text{ يكافئ}$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 0 \text{ يكافئ}$$

$$\overrightarrow{DC} \cdot (2\overrightarrow{AB}) = 0 \text{ أي } \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}) = 0 \text{ يكافئ}$$

يعني أن الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{DC}$

وبالتالي في حالة  $A \neq B$  و  $C \neq D$  يكون لدينا: المستقيمان  $(AB)$  و  $(CD)$  متعامدان.

لدينا المستقيمان  $(AB)$  و  $(CD)$  متعامدان، ينتج حسب ما سبق أن:

$$(1) \dots AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

ومن تعامد  $(AD)$  و  $(BC)$  ينتج كذلك بإتباع نفس العلاقة السابقة

$$\text{أن: } (2) \dots AC^2 + BD^2 = AB^2 + DC^2$$

من (1) و (2) ينتج أن  $AD^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$  هذا يعني كذلك بإتباع نفس العلاقة

السابقة أن: المستقيمان  $(AC)$  و  $(BD)$  متعامدان.

• المستقيم  $(D)$  يعامد المستوي  $(P)$  معناه شعاع توجيه المستقيم  $(D)$  هو شعاع ناظم على المستوي  $(P)$ .

• المستويان  $(P)$  و  $(P')$  في الفضاء متعامدان معناه شعاعيهما الناظم  $\vec{n}(P)$  و  $\vec{n}(P')$  متعامدان.

## ★ المعادلة الديكارتية للمستوي

**تعريف**  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(P)$  مستوي من الفضاء

يشمل النقطة  $A$  و  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  شعاع ناظم له.

من أجل كل نقطة  $M(x; y; z)$  من الفضاء:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ معناه } M(x; y; z) \in (P)$$

من التكافؤ الأخير تنتج معادلة للمستوي  $(P)$  من الشكل:

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ حيث } d \in \mathbb{R}$$

## للحفظ

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

• المسافة بين النقطتين  $A(x_0; y_0; z_0)$  و  $B(x_1; y_1; z_1)$  هي:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

• المسافة بين النقطة  $A(x_0; y_0; z_0)$  والمستوي  $(P)$  الذي معادلته

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ هي: } \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

إذن الشعاعان  $\overline{AB}$  ،  $\overline{BC}$  غير مرتبطين خطياً. ( هذا النمط للبرهان يدعى البرهان بالخلف ).  
 نعلم أن للمستوي  $(ABC)$  معادلة ديكارتية من الشكل:  $ax + by + cz + d = 0$   
 يكفي إذاً البحث عن الأعداد  $a, b, c, d$ .

$$\begin{cases} a = -\frac{10}{29}d \\ b = -\frac{11}{29}d \\ c = -\frac{3}{29}d \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} a + 2b - c + d = 0 \\ 2a + 3c + d = 0 \\ -a + 3b + 2c + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A \in (ABC) \\ B \in (ABC) \\ C \in (ABC) \end{cases}$$

لدينا: معناه

نعطي أية قيمة للعدد  $d$ . مثلاً  $d = 29$

نحصل على معادلة المستوي:  $(ABC): -10x - 11y - 3z + 29 = 0$ .

### حساب مقدار

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $B(2;1;-1)$  ،  $A(3;0;-1)$

$C(4;2;5)$  و  $D(3;4;3)$  أربع نقط من هذا الفضاء.

• تأكد أن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين ثم احسب مساحته.

• تأكد أن للمستوي  $(ABC)$  معادلة ديكارتية من الشكل:

$$2x + 2y - z - 7 = 0$$

• احسب المسافة بين النقطة  $D$  والمستوي  $(ABC)$ ، ثم حجم رباعي

الوجوه  $ABCD$ .

الحل: لدينا:  $\overline{BC} (2;1;6)$  ،  $\overline{AC} (1;2;6)$  ،  $\overline{AB} (-1;1;0)$

$$BC = \sqrt{4+1+36} = \sqrt{41} \text{ و } AC = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41} \text{ ، } AB = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

يعني أن المثلث  $ABC$  متساوي الساقين ورأسه الأسس هو  $C$ .

مساحة المثلث  $ABC$  هي  $S_{ABC}$  حيث:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CT$  و  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= AI \times CI \\ \text{لدينا: } I\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right) & \quad \text{أي: } = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2} \text{ (u.a)} \\ CI &= \frac{9}{\sqrt{2}} \text{ و } AI = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

### معادلات ديكارتية للمستقيم والمستوي في الفضاء

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $B(2;0;3)$  ،  $A(1;2;-1)$

و  $C(-1;3;2)$  ثلاث نقاط من هذا الفضاء.

أعط تمثيل وسيطي ثم ديكارتي للمستقيم  $(AB)$ .

تحقق من وجود المستوي  $(ABC)$  ثم أعط معادلة ديكارتية له.

الحل: لدينا  $\overline{AB} (1;-2;4)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(AB)$

$M(x;y;z) \in (AB)$  يكافئ  $\overline{AM} = k \overline{AB}$

$$k \in \mathbb{R} / \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{يكافئ}$$

$$\text{أي: } k \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = k + 1 \\ y = -2k + 2 \\ z = 4k - 1 \end{cases} \text{ ويستنتج التمثيل الديكارتي بجملة}$$

معادلتين مستقلتين عن  $k$ .

$$\begin{cases} x = k + 1 \\ y = -2k + 2 \\ z = 4k - 1 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} k = x - 1 \\ y = -2(x - 1) + 2 \\ z = 4(x - 1) - 1 \end{cases}$$

$$\text{تدعى تمثيل ديكارتي للمستقيم } (AB) \quad \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 4x - z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

للمستوي  $(ABC)$  موجود إذا وفقط إذا كانت انقص  $A, B, C$  ليست على استقامة واحدة.

أي: المستوي  $(ABC)$  موجود إذا وفقط إذا كان الشعاعان  $\overline{AB}$  ،  $\overline{BC}$  غير مرتبطين خطياً.

فرض أن  $\overline{AB}$  ،  $\overline{BC}$  مرتبطين خطياً أي يوجد عدد حقيقي  $k$  بحيث:  $\overline{AB} = k \overline{BC}$

$$\text{وهذا تناقض} \quad \begin{cases} k = -\frac{1}{3} \\ k = -\frac{2}{3} \\ k = -4 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} -3k = 1 \\ 3k = -2 \\ -k = 4 \end{cases} \quad \text{معناه} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{معني أن:}$$

•  $M(x; y; z)$  نقطة من المستقيم  $(AB)$  معناه  $M(k+1; k+2; -2k)$ .

وبالتالي:  $MC'^2 = (k+1)^2 + (k+2-2)^2 + (-2k-4)^2$  أي

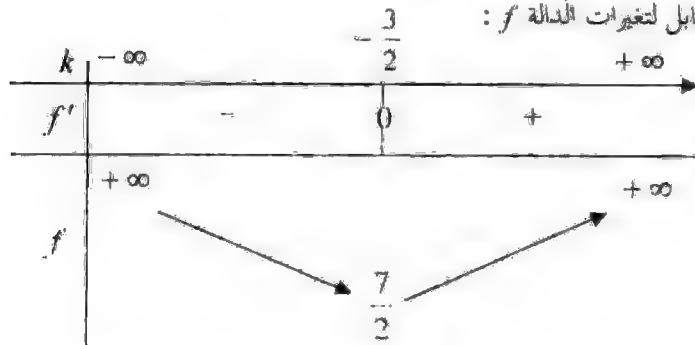
$$MC'^2 = 6k^2 + 18k + 17$$

أصغر قيمة ممكنة للمسافة  $MC'$  هي القيمة الحدّية الصغرى للدالة

$$f: k \mapsto 6k^2 + 18k + 17$$

بعد دراسة مختصرة لتغيرات الدالة كثير الحدود من الدرجة الثانية

نحصل على الجدول المقابل لتغيرات الدالة  $f$ :



أصغر قيمة للدالة  $f$  هي  $\frac{7}{2}$  تأخذها من أجل  $k = -\frac{3}{2}$ . هذا يعني أن أصغر قيمة

للعدد  $MC'^2$  هي:  $\frac{7}{2}$ . إذاً أصغر قيم للمسافة  $MC'$  هي:  $\sqrt{\frac{7}{2}}$ .

### المسافة بين نقطة ومستوى

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $A(1; 2; -1)$  نقطة من هذا الفضاء.

نعتبر المستويين  $P$  و  $P'$  حيث:  $P: 2x - y + 2z - 5 = 0$  و

$$P': 2x + 2y - z - 4 = 0$$

• يبين أن المستويين  $P$  و  $P'$  متعامدان.

• أحسب المسافة بين النقطة  $A$  وكل من المستويين  $P$  و  $P'$ .

• استنتج المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $\Delta$  الناتج من تقاطع

المستويين  $P$  و  $P'$ .

5

• يكفي التحقق من أن إحداثيات النقط الثلاث  $A, B, C'$  تحقق معادلة  $(ABC')$  علماً أنّها ليست على استقامة واحدة.

$$A \in (ABC') \text{ أي } 2(3) + 2(0) - (-1) - 7 = 6 + 1 - 7 = 0$$

$$B \in (ABC') \text{ أي } 2(2) + 2(1) - (-1) - 7 = 4 + 2 + 1 - 7 = 0$$

$$C' \in (ABC') \text{ أي } 2(4) + 2(2) - 5 - 7 = 8 + 4 - 5 - 7 = 0$$

• المسافة بين النقطة  $D$  والمستوي  $(ABC')$  تعطى بالعلاقة:  $\frac{|2x_D + 2y_D - z_D - 7|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{4}{3}$

هذه المسافة تمثل طول الارتفاع  $h$  النازل من الرأس  $D$  على القاعدة  $(ABC)$  في رباعي الوجوه  $ABCD$ .

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = 2(u.v)$$

إذاً: حجم رباعي الوجوه  $ABCD$  يعطى بالعلاقة:

$$h = \frac{4}{3} \text{ و } s = S_{ABC}$$

حيث:  $u.v$  يرمز إلى وحدة المساحة و  $u.v$  يرمز إلى وحدة الحجم.

### المسافة بين نقطة ومستقيم

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $A(1; 2; 0), B(2; 3; -2), C'(0; 2; 4)$

ثلاث نقط من هذا الفضاء.

• عيّن تمثيل وسيطي للمستقيم  $(AB)$ .

• عيّن النقطة  $M$  من المستقيم  $(AB)$  بحيث تكون المسافة  $MC'$  أصغر ما يمكن.

4

لدينا  $\overrightarrow{AB}(1; 1; -2)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(AB)$

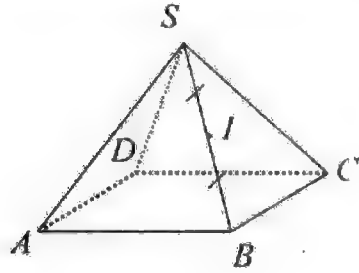
$$\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB} \text{ يكفي } M(x; y; z) \in (AB)$$

$$k \in \mathbb{R} / \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ يكفي}$$

$$\text{أي: } k \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = k + 1 \\ y = k + 2 \\ z = -2k \end{cases}$$

## تمارين للتدريب

1. هرم  $ABC'D'S$ ، قاعدته مربعة ورأسه  $S$  وأحرفه متقايسة وقيسها  $a$ .



$I$  منتصف الحرف  $[SB]$ .

• احسب بدلالة  $a$  الجداءات السلمية التالية:

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC'}, \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$$

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC}$$

• عيّن قياساً للزاوية  $\widehat{AIC'}$ .

2.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $A(2; -3; 4)$ ،  $B(1; 0; 2)$ ،  $C(2; -1; 2)$  و

$D(1; -1; 3)$  أربع نقط من هذا الفضاء.

بيّن أن النقط الأربعة  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  من نفس المستوي بطريقتين:

• بالتعبير عن الشعاع  $\overrightarrow{AD}$  بدلالة الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$ .

• بالبرهان أن النقطة  $D$  تنتمي إلى المستوي  $(ABC)$ .

3. مكعب  $ABCDEFGH$  مكعب. بيّن أن المستويين  $(BDE)$  و  $(CFH)$

متوازيين وذلك بطريقتين مختلفتين:

• بطريقة هندسية.

• باستعمال المعلم  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$  ومعادلات المستويات.

4. مكعب  $ABCDEFGH$  مكعب.  $P$  مركز ثقل المثلث  $BEG$ .

باستعمال المعلم  $(E; \overrightarrow{EF}; \overrightarrow{EH}; \overrightarrow{EA})$  تعرّف على إحداثيات النقط

$E$ ،  $F$ ،  $B$ ،  $D$ ،  $G$  و  $P$ ، ثم بيّن أن النقط  $D$ ،  $F$  و  $P$  على استقامة واحدة.

5. مكعب  $ABCDEFGH$  مكعب قياس حرقه  $a$ . اهدف في هذا التمرين هو البرهان على

أن  $(AG) \perp (BDE)$  بثلاث طرق مختلفة.

الحل:  $\vec{n}(2; -1; 2)$  شعاع ناظم على المستوي  $P$  و  $\vec{n}'(2; 2; -1)$  شعاع ناظم على المستوي  $P'$ .

ولدينا:  $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times 2 + 2(-1) + (-1)2 = 0$  معناه  $\vec{n} \perp \vec{n}'$  وبالتالي المستويين  $P'$  و  $P$  متعامدين.

المسافة بين النقطة  $A$  والمستوي  $P$  تعطى بالعلاقة:  $\frac{|2(1) - (2) + 2(-1) - 5|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{7}{3}$

المسافة بين النقطة  $A$  والمستوي  $P'$  تعطى بالعلاقة:  $\frac{|2(1) + 2(2) - (-1) - 4|}{\sqrt{4+4+1}} = 1$

لتكن  $I$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستوي  $P$ . أي  $AI = \frac{7}{3}$  و  $I'$  المسقط العمودي

نقطة  $A$  على المستوي  $P'$ .

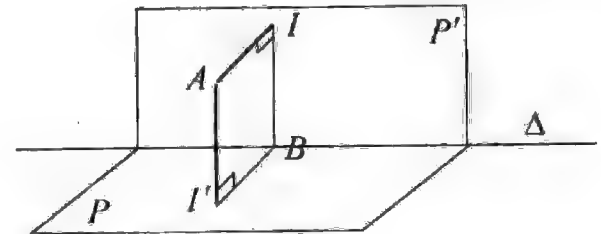
ي  $AI' = 1$  نسمي  $B$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $\Delta$ .

بنا الرباعي  $AIBI'$  مستطيل، ذلك لأن  $(BI) \perp (BI')$  و  $(AI) \perp (BI)$  و  $(BI') \perp (BI)$  (من المعطيات)

: المثلث  $AIB$  قائم في  $I$ . حسب فيثاغورث Pythagore لدينا:

$$AB^2 = AI^2 + IB^2 = \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 1 = \frac{58}{9}$$

$AB = \frac{\sqrt{58}}{3}$  وهي المسافة بين النقطة  $A$  والمستقيم  $\Delta$ .



(1) بين أن النقطتين  $A$  و  $G$  تنتميان إلى المستوي المحوري للقطعة  $[BE]$  وكذلك إلى المستوي المحوري للقطعة  $[BD]$ . استنتج.

(2) بين أن:  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$  وأن:  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$ . استنتج أن  $(AG) \perp (BDE)$ .

(3) استعمل المعلم المتعامد والمتجانس  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .

6.  $ABCDEFGH$  مكعب. نعتبر المعلم المباشر للفضاء  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .

يرمز  $I$  إلى منتصف القطعة المستقيمة  $[EF]$ ، و  $J$  مركز المربع  $ADHE$ .

احسب مساحة المثلث  $IGA$ . احسب حجم رباعي الوجوه  $ABIG$ ، واستنتج

البعد بين النقطة  $B$  والمستوي  $(AIG)$ .

عين إحداثيات  $K$  نقطة تقاطع المستقيم  $(BJ)$  مع المستوي  $(AIG)$ .

اعد إذاً حساب المسافة بين النقطة  $B$  والمستوي  $(AIG)$ .

7.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

$A(-1; 2; 0)$ ،  $B(-3; 4; 2)$ ،  $C(1; -2; -1)$  ثلاث نقط من هذا الفضاء.

بين أن الشعاعان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  غير مرتبطين خطياً.

بين أن الشعاع  $\vec{n}(a; b; c)$  يكون ناظم على المستوي  $(ABC)$  إذا وفقط إذا كان

$$\begin{cases} -a + b + c = 0 \\ 2a - 4b - c = 0 \end{cases}$$

استنتج مما سبق إحداثيات صحيحة نسبية للشعاع الناظم  $\vec{n}$  على المستوي  $(ABC)$

ومعادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ .

8.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(P)$  المستوي الذي يشمل

النقطة  $A(1; -2; 1)$  والشعاع  $\vec{n}(-2; 1; 5)$  ناظم عليه.

$(P')$  المستوي الذي معادلته الديكارتية هي:  $x + 2y - 7 = 0$ .

بين أن المستويان  $(P)$  و  $(P')$  متعامدان.

بين أن المستويان  $(P)$  و  $(P')$  يتقاطعان وفق المستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل النقطة

$C(-1; 4; -1)$  وشعاع توجيهه  $\vec{d}(2; -1; 1)$ .

احسب المسافة بين النقطة  $B(5; -2; -1)$  وكلا من المستويين  $(P)$  و  $(P')$ ، ثم عين

المسافة بين النقطة  $B$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

9.  $ABCDEFGH$  مكعب. نرمز بـ  $I$  و  $I'$  لمركزتي الوجهين  $ADHE$  و

$BCGF$  على الترتيب.

$N$  و  $P$  نقطتان من القطعتين  $[HF]$  و  $[AC]$  على الترتيب المعرفتان بـ:  $\overrightarrow{HN} = k\overrightarrow{HF}$

و  $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$  حيث:  $k \in [0; 1]$ .

بين أن النقطة  $N$  هي مرجح الجملة المثقلة  $\{(H; 1-k); (F; k)\}$  وأن النقطة  $P$  هي

مرجح الجملة المثقلة  $\{(A; 1-k); (C; k)\}$ .

نعتبر النقطة  $J$  منتصف القطعة  $[NP]$ ، بين أن:  $\overrightarrow{HN} + \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{IJ}$  و

$$\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IJ'}$$

استنتج أن:  $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{IJ'}$  /  $k \in [0; 1]$ .

ما هي مجموعة النقط  $J$  عندما يتغير  $k$  في المجال  $[0; 1]$ ؟

10.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء. عين تقاطع سطح الكرة  $(\Gamma)$  الذي

مركزه  $\Omega(1; -1; 1)$  ونصف قطره 3 مع المستوي  $(xOy)$ .

# 10 - المقاطع المستوية للسطوح

Hard equation

ما يجب أن يعرف:

★ مقطع سطح بمستو مواز لأحد مستويات الإحداثيات

◆ حالة الاسطوانة الدورانية

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

$(\Gamma)$  اسطوانة دورانية محورها  $(Oz)$  ونصف قطرها  $r$ .

• مقطع  $(\Gamma)$  بالمستوي الذي معادلته  $a \in \mathbb{R} / z = a$  هي الدائرة  $C_a$

مركزها  $\Omega(0;0;a)$  ونصف قطرها  $r$ .

• مقطع  $(\Gamma)$  بالمستوي الذي معادلته  $x = a$  أو  $y = a$   $a \in \mathbb{R}$  هي مستقيم،

اتحاد مستقيمين أو مجموعة خالية.

للحفظ

إذا كان  $(C)$  مقطع الاسطوانة الدورانية  $(\Gamma)$  بالمستوي العمودي

على محورها فإن  $(\Gamma)$  هو:

• اتحاد الدوائر صور  $(C)$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{k}$  حيث  $\lambda$  يسمح

بمجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء الصفر.

• اتحاد المستقيمات الموازية للمستقيم  $(Oz)$  والتي تقطع  $(C)$ .

◆ حالة المخروط الدوراني

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(\Gamma')$  مخروط دوراني غير محدود محوره  $(Oz)$  ومركزه  $O$ .

• مقطع  $(\Gamma')$  بالمستوي الذي معادلته  $a \in \mathbb{R} / z = a$  هو الدائرة  $C_a$  التي

مركزها  $\Omega(0;0;a)$ .

• مقطع  $(\Gamma')$  بالمستوي الذي معادلته  $x = a$  أو  $y = a$   $a \in \mathbb{R}$  هو اتحاد مستقيمين أو قطع زائد.

للحفظ

إذا كان  $(C)$  مقطع المخروط الدوراني غير المحدود  $(\Gamma')$  بالمستوي

العمودي على محوره والذي لا يشمل  $O$  فإن  $(\Gamma')$  هو:

• اتحاد الدوائر صور  $(C)$  بالتحاكيات التي مركزها  $O$  ونسبتها  $\lambda$  حيث

$\lambda$  يسمح بمجموعة الأعداد الحقيقية ماعدا 0.

• اتحاد المستقيمات التي تشمل المبدأ  $O$  ونقطة من  $(C)$ .

★ الدوال ذات متغيرين

◆ السطوح

تعريف

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

$f$  الدالة العددية للمتغيرين  $x$  و  $y$  معرفة على المجال  $I$  بالنسبة للمتغير  $x$

وعلى المجال  $J$  بالنسبة للمتغير  $y$ .

مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  حيث:  $x \in I$  و  $y \in J$  و  $z = f(x; y)$

تدعى سطح  $\Sigma$  من الفضاء يمثل الدالة  $f$ ، و  $z = f(x; y)$  هي معادلة

ديكارتية للسطح  $\Sigma$ .

مقطع السطح  $\Sigma$  بالمستوي الذي معادلته  $z = \lambda$  حيث:  $\lambda \in \mathbb{R}$  يدعى

منحني الدالة  $f$  من المستوى  $\lambda$ .

◆ أسطح خاصة

• السطح الذي معادلته  $z = x^2 + y^2$  يدعى مجسم مكافئ دوراني  $Paraboloid e$ .

منحنياته من المستوى هي دوائر.

مقطعه بالمستويات الموازية لأحد المستويين  $(xOz)$  أو  $(yOz)$  هو قطع مكافئ.

إذا كان  $(P)$  القطع المكافئ الذي معادلته  $z = x^2$  في المستوى المزود بالمعلم  $(O; \vec{i}; \vec{k})$ .

فإننا نحصل على المجسم المكافئ الدوراني، بدوران  $(P)$  حول المحور  $(Oz)$ .

## الأسطوانة الدورانية - المخروط الدوراني - سطح الكرة

$B(1;2;3)$ ،  $A(1;1;\sqrt{6})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

و  $C(0;0;1)$  ثلاث نقط من هذا الفضاء.

• أعط معادلة المخروط الدوراني  $\Gamma$  الذي محوره  $(Oz)$  ورأسه  $O$  ويشمل

النقطة  $A$ . أحسب  $\theta$  زاويته عند الرأس.

• أعط معادلة الأسطوانة الدورانية  $\Psi$  التي محورها  $(Oz)$  وتشمل النقطة  $B$ .

• نعتبر سطح الكرة  $S$ ، التي مركزها  $C$  ونصف قطرها 3. عيّن طبيعة المجموعة

$\Psi \cap S$  واعط معادلة ديكرتية لها.

2

الحل: للمخروط الدوراني  $\Gamma$  معادلة من الشكل:  $x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2 = 0$

بما أن  $A \in \Gamma$  فإن:  $1^2 + 1^2 - \alpha^2 \sqrt{6}^2 = 0$  أي  $\alpha^2 = \frac{1}{3}$  وبالتالي:  $\Gamma: x^2 + y^2 - \frac{1}{3}z^2 = 0$

نضع:  $H(0;0;\sqrt{6})$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المحور  $(Oz)$ .

ينتج أن المثلث  $OHA$  قائم في  $H$ . إذاً:  $\tan \theta = \frac{AH}{OH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  منه  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

للأسطوانة الدورانية  $\Psi$  معادلة من الشكل:  $x^2 + y^2 = r^2$

بما أن  $B \in \Psi$  فإن:  $1^2 + 2^2 = r^2$  أي  $r^2 = 5$  وبالتالي:  $\Psi: x^2 + y^2 = 5$

معادلة سطح الكرة  $S$ ، هي:  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$

$M(x,y,z) \in \Psi \cap S$  معناه  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \end{cases}$  يكافئ  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = -1 \end{cases}$  أو  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = 3 \end{cases}$

هي اتحاد الدائرتين  $(C)$  و  $(C')$ ،

$(C)$  مركزها  $\omega(0;0;-1)$  ونصف قطرها  $\sqrt{5}$  وتقع في المستوي الذي معادلته  $z = -1$ .

$(C')$  مركزها  $\omega'(0;0;3)$  ونصف قطرها  $\sqrt{5}$  وتقع في المستوي الذي معادلته  $z = 3$ .

## الدالة ذات متغيرين

$B(2;0;4)$ ،  $A(1;-1;0)$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نقطتان من هذا الفضاء. نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي معادلته  $z = x^2 - y^2$ .

3

يبين أن المستقيم  $(AB)$  محتوي في السطح  $(\Gamma)$ .

• السطح الذي معادلته  $z = xy$  يدعى مجسم زائدي دوراني hyperboloi de

منحنياته من المستوى هي قطوع زائدة معادلته  $xy = k$  حيث  $k$  عدد حقيقي غير معدوم.

في حالة  $k = 0$  نحصل على اتحاد المحورين  $(Ox)$  و  $(Oy)$ .

## تارين محلولة

## السطوح

$\Sigma$  سطح معادلته  $z = x^2 - 2x + y^2 - 2$

اكتب معادلة  $\Sigma$  بالشكل:  $z = (x-a)^2 + y^2 + b$

حيث  $a$  و  $b$  عددا حقيقيان يطلب تعيينهما.

استنتج أن  $\Sigma$  محتواة في نصف الفضاء المعروف بـ:  $z \geq -3$ .

1

الحل: لدينا  $z = x^2 - 2x + y^2 - 2$  تكافئ  $z = x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2$

تكافئ  $z = (x-1)^2 + y^2 - 3$

إذاً:  $a = 1$  و  $b = -3$ .

من أجل كل  $x$  و  $y$  من  $R$ ،  $(x-1)^2 + y^2 \geq 0$  وبالتالي  $z \geq -3$

من أجل كل نقطة  $M(x,y,z) \in \Sigma$  من الفضاء، معناه  $z = (x-1)^2 + y^2 - 3$

منه  $z \geq -3$ .

أي  $\Sigma$  محتواة في نصف الفضاء المعروف

بـ:  $x$  و  $y$  من  $R$  و  $z \geq -3$ .

استلزام



الحل: لدينا: من أجل كل نقطة  $M(x, y, z) \in (AB)$  من الفضاء،

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ أي: } \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB} \text{ معناه}$$

$$\text{وبالتالي: } \begin{cases} x = k+1 \\ y = k-1 \\ z = 4k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R} \text{ هو تمثيل ديكارتي للمستقيم } (AB).$$

هل إحداثيات نقطة  $M$  من المستقيم  $(AB)$  تحقق معادلة  $(\Gamma)$  ؟

$$(k+1)^2 - (k-1)^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 + 2k - 1 = 4k = z$$

#### الدالة ذات متغيرين

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي معادلته  $z = 2e^{-(x^2 + y^2)}$ .

- يبين أن السطح  $(\Gamma)$  محصور بين المستويين الذين معادلتهم  $z=0$  و  $z=2$ .
- يبين أن السطح  $(\Gamma)$  يقبل ذروة عظمى وحيدة يطلب تعيينها.

الحل: من أجل كل نقطة  $M(x, y, z) \in (\Gamma)$  من الفضاء،

$$\text{معناه } z = 2e^{-(x^2 + y^2)}$$

لدينا: من أجل كل  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$ ،  $x^2 + y^2 \geq 0$  وبالتالي  $-(x^2 + y^2) \leq 0$

أي  $e^{-(x^2 + y^2)} \leq e^0$  يعني أن  $0 < z \leq 2$  كون العدد الأسّي  $e^x$  موجب تماماً.

إذاً:  $(\Gamma)$  محصور بين المستويين الذين معادلتهم  $z=0$  و  $z=2$ . (دون أن يقطع المستوي  $z=0$ )

لدينا النقطة  $M_0(0;0;2)$  تنتمي إلى السطح  $(\Gamma)$ ، ومن الحصر السابق، كل نقطة من

$(\Gamma)$  تحقق  $z \leq 2$  فإن  $M_0(0;0;2)$  ذروة عظمى للسطح  $(\Gamma)$ . هل هي وحيدة؟

نبحث عن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  علماً أن  $z = 2$ .

$$2 = 2e^{-(x^2 + y^2)} \text{ يكافئ } -(x^2 + y^2) = 0 \text{ يكافئ } x=0 \text{ و } y=0$$

إذاً: النقطة  $M_0(0;0;2)$  ذروة عظمى وحيدة للسطح  $(\Gamma)$ .

#### دراسة سطح معادلته من الشكل $z = f(x, y)$

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي معادلته  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

• عيّن تقاطع السطح  $(\Gamma)$  مع كل من المستويين:  $(P): x=0$  و

$(P'): y=2$

• ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $k$ ، مجموعة تقاطع  $(\Gamma)$  مع

المستوي  $(P_k): z=k$ .

5

الحل: من أجل كل نقطة  $M(x, y, z) \in (\Gamma)$  من الفضاء،

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}x^2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ x = 0 \end{cases} \text{ معناه } M(x, y, z) \in (\Gamma) \cap (P)$$

معادلته  $z = \frac{1}{2}y^2$  في المستوي  $(P)$ .

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}x^2 + 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ y = 2 \end{cases} \text{ معناه } M(x, y, z) \in (\Gamma) \cap (P')$$

معادلته  $z = \frac{1}{2}x^2 + 2$  في المستوي  $(P')$ .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2k \\ z = k \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ z = k \end{cases} \text{ معناه } M(x, y, z) \in (\Gamma) \cap (P_k)$$

نناقش ثلاثة حالات ( $k > 0, k = 0, k < 0$ )

في حالة  $k < 0$ . الكتابة  $x^2 + y^2 = 2k$  مستحيلة (مجموع مربعين هو عدد موجب)

إذاً:  $(\Gamma) \cap (P_k) = \emptyset$

في حالة  $k = 0$ .  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = k \end{cases}$  تكافئ  $x=0$  و  $y=0$  و  $z=0$  إذاً:  $(\Gamma) \cap (P_k) = \{O\}$

في حالة  $k > 0$ . الجملة  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2k \\ z = k \end{cases}$  تعين دائرة. إذا:  $(\Gamma) \cap (P_k)$  الدائرة التي مركزها  $\Omega(0;0;k)$  ونصف قطرها  $\sqrt{2k}$  وتقع في المستوي الذي معادلته  $z = k$ .

## تمارين للتدريب

1.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(\Sigma)$  الاسطوانة الدورانية التي محورها  $(Oz)$  وتشمل النقطة  $A(1;2;3)$ .

عَيِّن معادلة ديكارتية للأسطوانة  $(\Sigma)$ ، ثم عَيِّن مقطع  $(\Sigma)$  بكل من المستويات التي معادلاتها:  $x = 2$ ،  $y = -3$  و  $z = -4$ .

2.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(\Sigma)$  المخروط الدوراني الذي محوره  $(Oz)$  ورأسه  $O$  ويشمل النقطة  $A(1;2;3)$ .

عَيِّن معادلة ديكارتية للمخروط  $(\Sigma)$ ، ثم عَيِّن مقطع  $(\Sigma)$  بكل من المستويات التي معادلاتها:  $x = y$  و  $z = 1$ ،  $z = -2$ .

3.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(\Gamma)$  المخروط الدوراني الذي محوره  $(Oz)$  ورأسه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

تحقق أن النقطة  $A(1; \sqrt{2}; 1)$  تنتمي إلى  $(\Gamma)$ ، ثم أعط معادلة للمخروط  $(\Gamma)$ .

لتكن  $(\Sigma)$  سطح الكرة التي مركزها  $\Omega(0;0;1)$  ونصف قطرها 1،

عَيِّن المجموعة  $(\Gamma) \cap (\Sigma)$ .

4.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $(D)$  استقيم الذي يشمل انبداً  $O$  وشعاع توجيهه  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{k}$

$(\Gamma)$  المخروط الدوراني الذي رأسه  $O$  ومحوره  $(Oz)$  ويشمل المستقيم  $(D)$ .

أعط معادلة للمخروط الدوراني  $(\Gamma)$ .

• عَيِّن قيمة العدد الحقيقي الموجب تماماً  $a$  بحيث يكون مقطع المخروط  $(\Gamma)$  بالمستوي ذي المعادلة  $z = a$  هو دائرة نصف قطرها 2 يطلب تعيين مركزها.

5.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي معادلته  $z = f(x; y)$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $k$ ، المنحني ذي المستوى  $k$  للدالة  $f$  هو المستقيم الذي يشمل النقطة  $A(-k; k+1; k)$  وشعاع توجيهه  $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ . تعرف على السطح  $(\Gamma)$  والدالة  $f$ .

6.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح  $(\Gamma)$  ذي المعادلة

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1$$

• ما هي التلمذ من  $(\Gamma)$  الأقرب إلى الخور  $(Oz)$ ؟

•  $A$  نقطة كيفية من  $(\Gamma)$ ، كم عدد المستقيمات التي تشمل  $A$  ومحتواة في السطح  $(\Gamma)$ ؟

7.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي معادلته

$$z = x^2 - y^2$$

$(P)$ ،  $(P')$  و  $(P'')$  ثلاثة مستويات معادلاتها  $x = 2$ ،  $y = 3$  و  $z = -2$  على الترتيب.

• عَيِّن مقطع السطح  $(\Gamma)$  بكل من المستويين  $(P)$  و  $(P')$ .

• نعتبر المعلم للفضاء  $(O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{k})$  حيث:  $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$  و  $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ .

ونضع:  $(x; y; z)$  و  $(X; Y; Z)$  إحداثيات النقطة  $M$  في المعلمين  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  و  $(O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{k})$  على الترتيب.

أعط معادلة ديكارتية للسطح  $(\Gamma)$  في المعلم  $(O; \vec{u}; \vec{v}; \vec{k})$ ، ثم استنتج مقطع السطح  $(\Gamma)$  بالمستوي  $(P'')$ .

8.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.  $f$  الدالة العددية للمتغيرين  $x$  و  $y$

من  $R$  معرفة بالدستور:  $f(x; y) = x^2 - 2x + y^2 + y - 1$  و  $(\Gamma)$  السطح الذي معادلته

$$z = f(x; y)$$

• اكتب  $f(x; y)$  بالشكل:  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + c$  حيث  $a$ ،  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية

يطلب تعيينها.

• بين أن الدالة  $f$  تقبل قيم حدية صغرى يطلب تعيينها.

• عَيِّن مقطع السطح  $(\Gamma)$  بكل من المستويين:  $(P): x = 1$  و  $(P'): z = -1$ .

• عيّن تقاطع السطح  $(\Gamma)$  مع سطح الكرة التي مركزها  $\Omega\left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$

ونصف قطرها 1.

9.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي معادلته

$$z = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$$

• بيّن أن السطح  $(\Gamma)$  محصور بين المستويين اللذين معادلتهم  $z = 0$  و  $z = 2$ .

• نعتبر المستوي  $(P_k)$  الذي معادلته  $z = k$ .

• عيّن تقاطع السطح  $(\Gamma)$  مع المستوي  $(P_1)$ .

• ناقش حسب قيم العدد الحقيقي  $k$  مقطع السطح  $(\Gamma)$  بالمستوي  $(P_k)$ .

• ارسم المساقط العمودية لمقاطع السطح  $(\Gamma)$  مع كل من المستويات  $(P_{0.5})$ ،

$(P_1)$ ،  $(P_{1.5})$  و  $(P_2)$  على المستوي المزود بالمعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

10.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء. نعتبر السطح  $(\Gamma)$  الذي

$$معادلته \quad z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $k$ ، نضع:  $(P_k): z = k$  و  $(\Pi_k): x = k$ .

• بيّن أن السطح  $(\Gamma)$  يقبل ذروة صغرى  $A(0; 0; 1)$ .

• ناقش حسب قيم العدد الحقيقي  $k$  مقطع السطح  $(\Gamma)$  بالمستوي  $(P_k)$ .

• نضع:  $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{k} - \vec{j})$  و  $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k})$  النقطة ذات

الإحداثيات  $(k; 0; 0)$ .

تأكد من أن  $(I_k; \vec{u}; \vec{v})$  معلم متعامد ومتجانس.

باستعمال المعلم  $(I_k; \vec{u}; \vec{v})$  عيّن مقطع السطح  $(\Gamma)$  بالمستوي  $(\Pi_k)$ .

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي و للمؤلف بالخير



و النجاح و المغفرة

**Hard\_equation**